Zadania z Algebry I. 31.03.15

1. Niech $V := \mathbb{R}^3$. Sprawdzić, że formy liniowe $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in V^*$, dane wzorami: $\phi_k(\vec{x}) := x_1 + x_2 + x_3 - 2kx_k, \quad k = 1, 2, 3$ tworzą bazę V^*

2. Niech $V := \mathbb{R}_3[\cdot]$. Określmy formy liniowe $\phi_0, \ldots, \phi_3 \in V^*$ wzorami:
$< \phi_k, v >:= v^{(k)}(-4), \quad k = 0, \ldots, 3.$
Znaleźć bazę w V, do której baza $\phi_0, \ldots, \phi_3 \in V^*$ jest sprzężona.

3. Znaleźć rząd, sygnaturę oraz bazę diagonalizującą formę kwadratową, jeśli $Q : V \to \mathbb{R}$ ma następującą postać:
(a) $V := \mathbb{R}_2[\cdot]$, $Q(v) := v(-1) \cdot v'(1)$.
(b) $V := \mathbb{R}^2{}_2$, $Q(\mathbf{x}) := \operatorname{tr}\left(\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\right)$.

4. Znaleźć sygnaturę oraz bazę diagonalizującą formy kwadratowej Q, określonej na przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wzorem $Q(\mathbf{x}) := x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

5. Dane są dwie formy kwadratowe: $Q : V \to \mathbb{R}$ oraz $Q_0 : V_0 \to \mathbb{R}$. Znaleźć, lub (też wykazać, że nie istnieje) operator liniowy $F : V \to V_0$, taki że $\forall v \in V : Q(v) = Q_0(Fv)$ gdy:
(a) $V := \mathbb{R}^2{}_2,\ Q(\mathbf{x}) := \det \mathbf{x}, \quad V_0 := \mathbb{R}_3[\cdot],\ Q_0(v) := \int_0^1 [v(t)]^2 dt,$
(b) $V := \mathbb{R}^2{}_2,\ Q(\mathbf{x}) := \det \mathbf{x}, \quad V_0 := \mathbb{R}^2{}_2,\ Q(\mathbf{x}) := \operatorname{tr}(\mathbf{x}^2),$
(c) $V = V_0 = \mathbb{R}^2,\ Q(\mathbf{x}) := 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2,\ Q_0(\mathbf{x}) := 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2.$

6. Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie wektorów własnych dla następujących przekształceń liniowych:
a) rzut prostokątny w $\mathbb{R}^2$ na oś OX,
b) obrót w $\mathbb{R}^2$ o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół punktu $(0, 0)$,
c) Symetria w $\mathbb{R}^3$ względem osi OZ,
d) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, L(x, y, z) = (x - z, 2y, x + z)$.
e) $L : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, L(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 2 & 2-i \end{bmatrix}$.

7. Obliczyć $\varphi(A)$, jeśli $A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, zaś $\varphi(\lambda) := \prod_{n=1}^{20} \left(\frac{20}{\pi}\lambda - 1\right)$.

8. Obliczyć $\cos\left(\frac{\pi}{2}A\right)$, dla $A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

9. Obliczyć $e^{\pi A}$, jeśli $A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

10. Dla $A := \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ obliczyć $\sin tA$, $\cos tA$, $(\sin tA)^2 + (\cos tA)^2$.

11. Określmy $F \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ wzorem $F(\mathbf{x}) := F\mathbf{x}$, gdzie $F := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
(a) Znaleźć wielomian $\varphi(\lambda)$, taki, że $\varphi(F) = F^{-1}$ (obliczenie F^{-1} nie jest tu konieczne). (b)

Wykazać, że dla dowolnego operatora $F \in \mathrm{End}(V)$, takiego, że $\det F \neq 0$, operator F^{-1} da się wyrazić jako wielomian od F.

12. Zbadać dla jakiej wartości $t \in \mathbb{C}$ macierz $B := \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ t & t+3 \end{bmatrix}$ można wyrazić jako wielomian od macierzy $A := \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$?

13. Niech $\mathbb{R}_4[\cdot]$. Sprawdzić, ze operator $P \in L(V,V)$, określony wzorem:
$(Pv)(t) := v(5) + (t-5)\dot{v}(5) + \frac{1}{2}(t-5)^2\ddot{v}(5)$, jest operatorem rzutowym. Znaleźć takie podprzestrzenie $V_0, V_1 \in V$, że P jest rzutem na V_1 wzdłuż V_0.

14. Niech $A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Znaleźć podprzestrzenie odpowiadające wartościom własnym A i związane z nimi operatory rzutowe.