Zadania z Algebry II

1. Załóżmy, że wektory e_1, e_2, e_3, e_4 tworzą bazę ortonormalną przestrzeni euklidesowej lub unitarnej V. Sprawdzić, że $v_1 \perp v_2$ oraz dopełnić parę v_1, v_2 do bazy ortogonalnej przestrzeni V, jeśli:
   (a) $v_1 := e_1 - 2e_2 + 2e_3 - 3e_4, \quad v_2 := 2e_1 - 3e_2 + 2e_3 + 4e_4$;
   (b) $v_1 := e_1 + e_2 + e_3 + 3ie_4, \quad v_2 := e_1 + 2e_2 + 3e_3 - 2ie_4$;
   (c) $v_1 := e_1 - e_2 - e_3 + e_4, \quad v_2 := e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$;
   (d) $v_1 := 2e_1 - 3e_2 + 4e_3 - 5e_4, \quad v_2 := 5e_1 + 4e_2 + 3e_3 + 2e_4$.

2. Sprawdzić, że wzór $(v|w) := \sum_{k=-1}^{1} \overline{v(k)}w(k)$ określa iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{C}_2[\,\cdot\,]$. Znaleźć rzut prostopadły wektora v na podprzestrzeń W, jeśli $v(t) := t^2$ oraz
   $W := \{w \in \mathbb{C}_2[\,\cdot\,] : \int_0^1 w(t)dt = 0\}$.

3. Określmy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}_4[\,\cdot\,]$ wzorem $(v|w) := \int_{-1}^{1} v(t)w(t)dt$. Znaleźć rzut prostopadły na podprzestrzeń $\mathbb{R}_3[\,\cdot\,]$ wektora v_0, jeśli $v_0(t) := t^4$.

4. Sprawdzić, że jeśli iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{R}^n_n$ zadany jest wzorem $(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}) := \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y})$, to przestrzeń $\mathbb{R}^n_n$ jest ortogonalną sumą prostą swoich podprzestrzeni V_0, V_+ oraz V_-, określonych wzorami
   $$V_0 := \langle \boldsymbol{I}_n \rangle, V_\pm := \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n_n : \ \boldsymbol{X}^T = \pm\boldsymbol{X}, \ \mathrm{tr}\,\boldsymbol{X} = 0\}.$$
   Dla $n = 3$ znaleźć rozkład $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{X}_+ + \boldsymbol{X}_-$ wektora $\boldsymbol{X} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3_3$.

5. Obliczyć $\gamma = (\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix})$, jeśli $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ jest takim iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{C}^3$, że $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3 : \ (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_1 + x_2 + x_3|^2$.

6. Znaleźć odstęp („odległość”) $\rho(L_1, L_2)$ dwóch prostych $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$, jeżeli $L_1 := \left\{(x, y, z) : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}\right\}$ oraz $L_2 = \Pi_1 \cap \Pi_2$, gdzie
   $$\Pi_1 := \{(x, y, z) : \ 2x + z = 5\}, \qquad \Pi_2 := \{(x, y, z) : \ x + y = 3\}.$$

7. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ dany jest punkt $P = (2, 3)$ oraz dwie proste: $L_1 := \{(x, y) : -x + 2y + 1 = 0\}$ i $L_2 := \{(x, y) : 2x + y - 2 = 0\}$. Znaleźć rzuty prostopadłe punktu P na te dwie proste, jego od nich odległość, oraz kąt pomiędzy prostymi: (a) w standardowym iloczynie skalarnym; (b) gdy iloczyn skalarny zadany jest macierzą $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}$.

8. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ iloczyn skalarny zadany jest macierzą $S = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & 14 & -5 \\ -2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$. Znaleźć w tej przestrzeni macierz obrotu o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi wyznaczonej przez wektor $(1,1,1)$.

9. Znaleźć macierz rzutu ortogonalnego na hiperpłaszczyznę w $\mathbb{R}^3$ opisaną równaniem $x + 2y - 2z = 0$. Przyjmujemy standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$.

10. Iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^2$ zadajemy wzorem:
$$(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1.$$
Operator liniowy A zadany jest za pomocą macierzy $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (w bazie kanonicznej). Znaleźć macierz operatora $A^\dagger$.

11. Sprawdzić, że operator $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ określony jako mnożenie przez macierz $\boldsymbol{F}$ (tzn. $F(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$) jest normalny; znaleźć ortonormalną bazę wektorów własnych, rzuty ortogonalne na podprzestrzenie własne oraz rozkład spektralny tego operatora.

(a) $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 2 & 6-8i \\ 10 & i \end{bmatrix}$; (b) $\boldsymbol{F} := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\boldsymbol{F} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

12. Dowieść, że operator $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$, $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$, jest operatorem normalnym wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\boldsymbol{F}$ jest jednej z dwu postaci:
$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \text{ lub } \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \text{ gdzie } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

13. Zbadać, czy w przestrzeni $\mathbb{C}^2$ istnieje iloczyn skalarny taki, że operator określony wzorem $F(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ jest: (a) normalny; (b) samosprzężony.

14. Znaleźć macierz $\left[F^\dagger\right]_e^e$ sprzężenia hermitowskiego operatora F, jeśli e oznacza bazę standardową $1, t, t^2$ przestrzeni $V := \mathbb{R}_2[t]$, przy czym

(a) $(Fv)(t) := v(t+1)$ (operator przesunięcia) oraz $(v|w) := \int_{-1}^{1} v(t)w(t)dt$;

(b) $(Fv)(t) := v'(t)$ (operator różniczkowania) oraz $(v|w) := \int_{-1}^{1} \overline{v(it)}w(it)dt$.

15. Niech będzie V przestrzenią unitarną lub euklidesową, $F \in \mathrm{End}\, V$, a $W \subset V$ | podprzestrzenią. Dowieść, że:

(a) $(F^\dagger W)^\perp = F^{-1}(W^\perp) := \{v : Fv \in W^\perp\}$;
(b) $F^\dagger\left((FW)^\perp\right) \subset W^\perp$, przy czym '$\subset$' jest równością $\iff$ $\ker F \subset W$.