EGZAMIN POPRAWKOWY Z ANALIZY I R

Instrukcja obsługi. Za każde zadanie można dostać 4 punkty. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na osobnej kartce starannie i czytelnie. W nagłówku rozwiązania należy umieścić **numer zadania, imię i nazwisko, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**.

1. Zbadać zbieżność ciągu rekurencyjnego: $a_1 := 5$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 4}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Jeśli jest on zbieżny, znaleźć jego granicę.

2. Niech $\mathrm{C}([a,b])$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dla $f, g \in \mathrm{C}([a,b])$ określamy

$$d(f,g) := \max_{x_2 \in [a,b]} \left\{ \min_{x_1 \in [a,b]} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - g(x_1))^2} \right\}.$$

Sprawdzić, czy d jest metryką na zbiorze $\mathrm{C}([a,b])$.

3. Zbadać przebieg funkcji $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ postaci $f(x) = (x^2 - 1)^{-1} + 1$ i naszkicować jej wykres.

4. W zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{1}{2n^2} \right) - \cos\left(\frac{1}{n} \right) \right)^{\alpha}.$$

5. Obliczyć

$$\int \frac{dx}{\sin(x)(2\cos^2(x) + 1)}, \qquad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}.$$

Data 19 lutego 2016 r.

Rozwiązania

*Rozwiązanie zadania **1**.* Niech $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$. Łatwo sprawdzamy, że dla $x > 2$ mamy $x > f(x) > 2$. Stąd ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący i ograniczony, a więc zbieżny do granicy $g \geq 2$. Ponieważ f jest funkcją ciągłą, mamy $f(g) = g$, a więc $g = 2$. □

*Rozwiązanie zadania **2**.* Jest jasne, że $d(f, g) \geq 0$, dla wszystkich $f, g \in \mathrm{C}([a, b])$. Jeśli $f = g$, to dla dowolnego $x_2 \in [a, b]$ wyrażenie

$$\min_{x_1\in[a,b]} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - g(x_1))^2}$$

jest równe 0 (wystarczy wziąć $x_1 = x_2$). Tak więc $d(f, f) = 0$.

Funkcja d nie jest jednak symetryczna. Przykładowo niech $f(x) = x$, a $g(x) = 0$ dla wszystkich $x \in [a, b]$. Wówczas

$$d(f,g) = \max_{x_2\in[a,b]} \left\{ \min_{x_1\in[a,b]} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + x_2^2} \right\},$$

$$d(g,f) = \max_{x_2\in[a,b]} \left\{ \min_{x_1\in[a,b]} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + x_1^2} \right\}.$$

Wielkość $\min_{x_1\in[a,b]} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + x_2^2}$ można interpretować jako odległość na płaszczyźnie punktu (x_2, x_2) od prostej $y = 0$, a więc wynosi ono $|x_2|$. Z kolei $\min_{x_1\in[a,b]} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + x_1^2}$,to odległość punktu $(x_2, 0)$ od prostej $y = x$, a więc wynosi ono $\frac{\sqrt{2}}{2}|x_2|$. W szczególności $d(g, f) = \frac{\sqrt{2}}{2} d(f, g)$. □

Rozwiązanie zadania 3. Funkcja f jest gładka na całym zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ i dla $x \notin \{-1, +1\}$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

Stąd łatwo obliczamy

$$\lim_{x \to \pm 1^{\pm}} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pm 1^{\mp}} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^{\mp}} f'(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to \pm 1^{\pm}} f''(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pm 1^{\mp}} f'(x) = -\infty$$

oraz

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0 = \lim \lim_{x \to \pm\infty} f''(x).$$

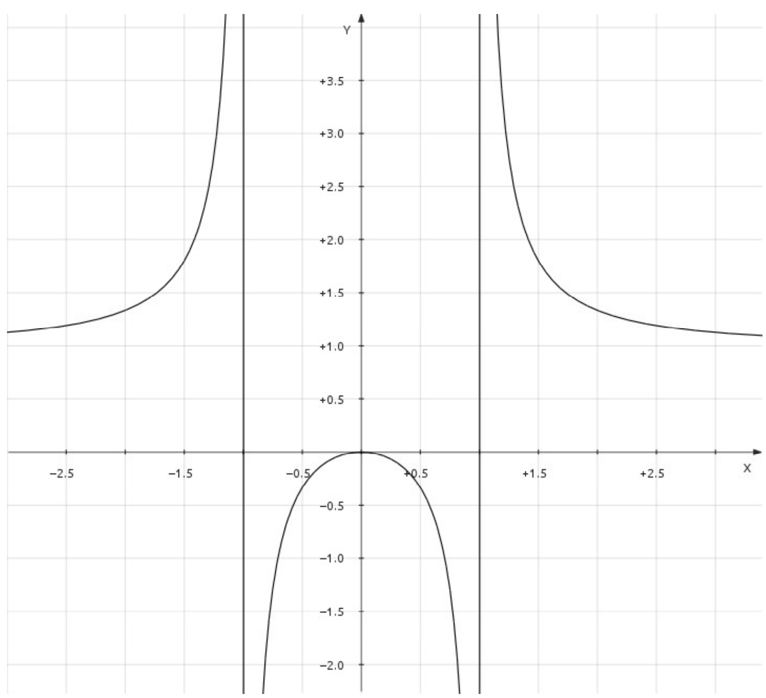
Tak więc funkcja f ma w punktach -1 i $+1$ asymptoty pionowe oraz asymptotę poziomą obustronną $y = 1$.

Jedynym miejscem zerowym f jest $x = 0$, tak samo jest dla f', natomiast f'' nie ma miejsc zerowych. Znaki i f, f' oraz f'' przedstawia następująca tabela:

	$]-\infty, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, 1[$	$]1, +\infty[$
f	$+$	$-$	$-$	$+$
f'	$+$	$+$	$-$	$-$
f''	$+$	$-$	$-$	$+$

Znak f, f' i f''

Tak więc funkcja f jest rosnąca na przedziałach $]-\infty, -1[$ i $]-1, 0[$, a malejąca na $]0, 1[$ i $]1, +\infty[$. Jest ona wypukła na przedziałach $]-\infty, -1[$ i $]1, +\infty[$, a wklęsła na $]-1, 0[$ i $]0, 1[$. Jedynym lokalnym ekstremum jest $x = 0$, $f(0) = 0$ – maksimum. f nie ma punktów przegięcia.



Wykres funkcji f

$\square$

Rozwiązanie zadania 4. Niech a_n oznacza n-ty wyraz ogólny badanego szeregu. Mamy $a_n = \left(\exp\left(-\frac{1}{2n^2}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha$, czyli $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$, gdzie $f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)-\cos x$. Korzystając czterokrotnie z reguły de l'Hospitala łatwo sprawdzamy, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4} = \frac{1}{12}.$$

(mamy $f'(x) = -x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \sin x$, $f''(x) = x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \cos x$, $f'''(x) = 3x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - x^3\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \sin x$, $f^{(4)}(x) = x^4\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - 6x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 3\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \cos x$, a więc $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 2$).

Ponadto, rozwinięcie w szereg funkcji f wygląda tak:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^n n!} - \frac{1}{(2n)!}\right)x^{2n}. \end{aligned}$$

Od razu widać, że jest to szereg naprzemienny i dla małych x wartości bezwzględne wyrazów monotonicznie dążą do 0. Istotnie, pisząc $u_n = \left(\frac{1}{2^n n!} - \frac{1}{(2n)!}\right)$ mamy

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= \left(\frac{1}{2^n n!} - \frac{1}{(2n)!}\right) - \left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} - \frac{1}{(2n+2)!}\right) \\ &= \frac{1}{(2n)!!} - \frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+2)!!} + \frac{1}{(2n+2)!} \\ &= \frac{1}{(2n)!(2n+2)}\left((2n+2)(2n-1)!! - (2n+2) - (2n-1)!! + \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{(2n)!(2n+2)}\left((2n+1)!! - (2n+2) + \frac{1}{2n+1}\right) > 0. \end{aligned}$$

Ponadto pierwsze cztery wyrazy są równe 0 (por. rachunki powyżej), a więc suma szeregu szacuje się z dołu przez piąty wyraz. Stąd $f(x) \geq \left(\frac{1}{2^5 5!} - \frac{1}{10!}\right)x^{10} > 0$. W szczególności wszystkie a_n są większe niż 0.

Tak więc $0 \leq a_n \sim \frac{1}{n^{4\alpha}}$ i szereg $\sum a_n$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**) wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > \frac{1}{4}$. □

*Rozwiązanie zadania **5**.* <u>Całka nieoznaczona:</u> mamy

$$\int \frac{dx}{\sin(x)(2\cos^2(x)+1)} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2(x)(2\cos^2(x)+1)} = \int \frac{-\sin x\, dx}{(\cos^2(x)-1)(2\cos^2(x)+1)}.$$

Podstawiamy $c = \cos x$i otrzymujemy całkę

$$\int \frac{dc}{(c^2-1)(2c^2+1)}.$$

Rozkład na ułamki proste funkcji wymiernej $\frac{1}{(c^2-1)(2c^2+1)}$ wygląda tak:

$$\frac{1}{(c^2-1)(2c^2+1)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{c-1} - \frac{1}{c+1} - 4\frac{1}{2c^2+1}\right),$$

a więc

$$\begin{aligned}\int \frac{dc}{(c^2-1)(2c^2+1)} &= \frac{1}{6}\left(\int \frac{dc}{c-1} - \int \frac{dc}{c+1} - 4\int \frac{dc}{2c^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{6}\left(\int \frac{dc}{c-1} - \int \frac{dc}{c+1} - 2\sqrt{2}\int \frac{d(\sqrt{2}c)}{(\sqrt{2}c)^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{6}\log\left|\frac{c-1}{c+1}\right| - \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}c\big) + \text{const.}\end{aligned}$$

Wracając do zmiennej x otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{\sin(x)(2\cos^2(x)+1)} = \frac{1}{6}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| - \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}\cos x\big) + \text{const.}$$

<u>Całka oznaczona</u> Ponieważ $(x-1)(2-x) = -x^2+3x-2 = -x^2+3x-\frac{9}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \big(x-\frac{3}{2}\big)^2$, mamy

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\big(x-\frac{3}{2}\big)^2}} = 2\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} = \int_1^2 \frac{d(2x-3)}{\sqrt{1-(2x-3)^2}},$$

więc podstawiając $u = 2x-3$ otrzymujemy

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(u)\Big|_{-1}^1 = \pi.$$

□