

WYKŁAD 23

31 maja 2016.

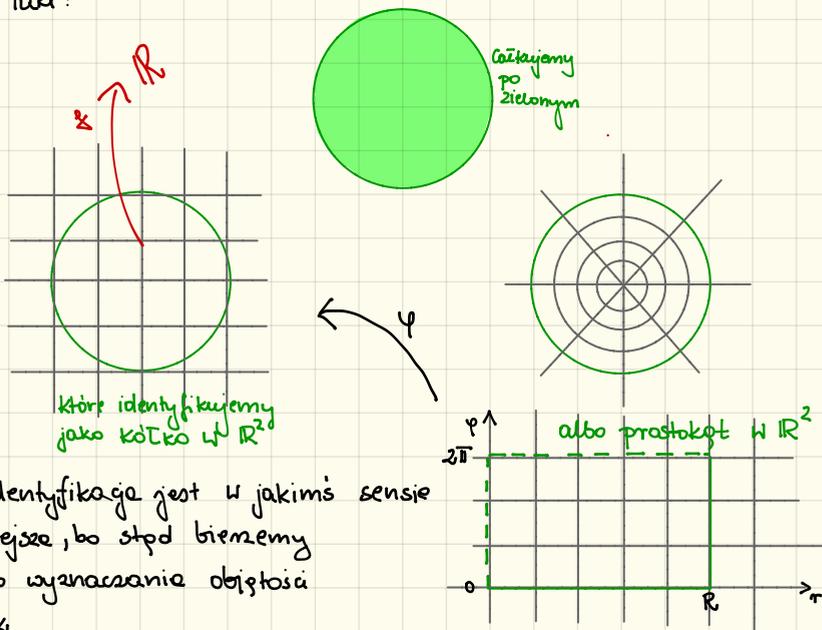
TWIERDZENIE O ZAMIANIE ZMIENNYCH W CAŁCE RIEMANNA NA \mathbb{R}^n

1

Niech U, \mathcal{O} będą otwarte w \mathbb{R}^n , $\varphi: U \rightarrow \mathcal{O}$ dyfeomorfizm klasy C^1 . Niech także $K \subset \bar{K} \subset U$ oraz $\varphi(K) \subset \mathcal{O}$ będą J -mierzalne. Wtedy jeśli f jest całkowalna na $\varphi(K)$ to f jest całkowalna na K , a ponadto

$$\int_{\varphi(K)} f = \int_K f \circ \varphi |\det \varphi|$$

Zauważmy, że wartości funkcji f się nie zmieniają, zmienia się tak nierzadko obszar po którym całkujemy. W fizyce patrzymy na to zazwyczaj jeszcze inaczej - w twierdzeniu o zamianie zmiennych w istocie zmienia się sposób w jaki identyfikujemy obszar całkowania z pewnym podzbiorem \mathbb{R}^n . Zmieniamy więc współrzędne a nie obszar całkowania. Jest to punkt widzenia jaki przybliża nas nieco do zagadnień związanych z geometrią różniczkową. Może więc uściślić rysunek jest następujący taki:



Ta identyfikacja jest w jakimś sensie ważniejsza, bo stąd bierzemy sposób wyznaczania objętości kostek.

Plan dowodu jest następujący (1) zajmiemy się zmianą miary katek pod działaniem odwzorowań liniowych. (2) jak zmienia się miara zbiorów J -miernalnych pod działaniem odwzorowań liniowych (3) różnica między działaniem φ a działaniem $\varphi'(x)$ jest między, jeśli tylko kateka o którą chodzi też jest między (4) podsumowanie i zakonczenie dowodu.

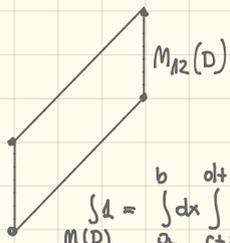
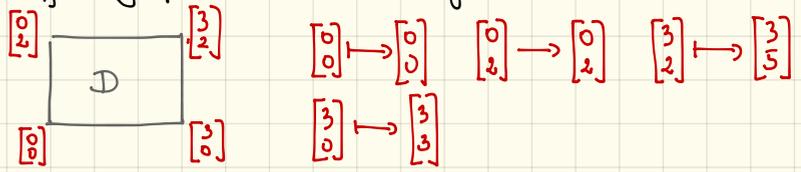
(1) Lemat 1: Jeśli $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest liniowe a D jest kateką to $m(T(D)) = m(D)|\det T|$.

Dowód: Zauważmy że odwzorowanie liniowe T takie, że $\det T \neq 0$ można zapisać jako złożenie następujących odwzorowań:

$I_\sigma \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x^{\sigma(n)} \end{bmatrix}$ - permutacja współrzędnych $I_\sigma(D)$ jest kateką o tej samej objętości co D , $\det I_\sigma = \text{sgn } \sigma$ $|\det I_\sigma| = 1$. Wzór zachowki.

$J_i(t) \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ tx^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$ - $J_i(t)(D)$ też jest kateką o i -tej kropce dłuższej rozj. objętości kateki zmienia się t -razy $m(J_i(t)(D)) = tm(D)$

$M_{ij}^\pm \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^j \pm x^i \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$ - Wystarczy sprawdzić w dwóch wymiarach:



$D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

$M_{12}(D) = \{(x, y) : a \leq x \leq b, b + c + x \leq y \leq d + x\}$

$\det M_{12} = 1$

$m(D) = m(M_{12}(D))$

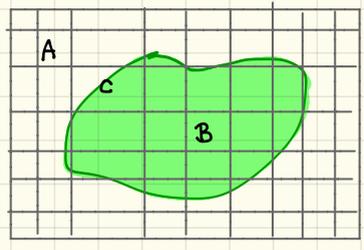
$$\int_{m(D)} 1 = \int_a^b dx \int_{c+x}^{d+x} dy = \int_a^b (d+x - (c+x)) dx = \int_a^b (d-c) dx = (d-c)(b-a) = m(D)$$

$I_\sigma, J_i(t), M_{ij}$ to są operacje elementarne. Każde macie można sprowadzić do 1 za pomocą operacji elementarnych. Każde T jest więc złożeniem elementarnych. Wynaczemik złożenia jest iloczynem wyznaczników. Dla operacji elementarnych wzór zachodzi. ■

(2)

Lemat 2 Niech K będzie J -miernalny. Wówczas $m(T(K)) = m(K)|\det T|$

DOWÓD Ten dowódzie tego faktu przydatne będzie inne spojrzenie na miernalność i miarę zbioru.



Wzemy podział π kostki D zawierającej K . Kostki podziału dzielą się na trzy kategorie

- A: $A \cap D = \emptyset$
- B: $\text{int } B \subset D \quad B_i \quad i=1 \dots k$
- C: reszta $C_j \quad j=1 \dots l$

$$K \subset \bigcup_i B_i \cup \bigcup_j C_j \quad \bigcup_i B_i \subset K \quad \sum_j m(B_j) \leq m(K) \leq \sum_i m(B_i) + \sum_j m(C_j)$$

Biorąc drobniejszy podział to zwiększamy

to zmniejszamy

Jeśli K jest J miernalny możemy znaleźć taki podział, żeby $\sum m(C_j) < \epsilon$ dla dowolnego ϵ . Wpze się to z faktem że $\bigcup C_j \supset \partial K$ a ∂K jest miary 0. Nie będziemy tego dokładnie dowodzić uznając że jest intuicyjne jaone.

$$T / \bigcup_i B_i \subset K \subset \bigcup_i B_i + \bigcup_j C_j$$

$$\bigcup_i T(B_i) \subset T(K) \subset \bigcup_i T(B_i) + \bigcup_j T(C_j)$$

$$\sum_i m(T(B_i)) \leq m(T(K)) \leq \sum_i m(T(B_i)) + \sum_j m(T(C_j))$$

$$|\det T| \sum_i m(B_i) \leq m(T(K)) \leq |\det T| \left(\sum_i m(B_i) + \sum_j m(C_j) \right) \quad /: |\det T|$$

$$\sum_i m(B_i) \leq \frac{m(T(K))}{|\det T|} \leq \sum_i m(B_i) + \sum_j m(C_j)$$

$$\left| \frac{1}{|\det T|} m(T(K)) - m(K) \right| < \epsilon \quad - \text{z dowolności } \epsilon \rightarrow \text{równe.} \quad \blacksquare$$

(3) Kolejny krok to pokazanie, że na wystarczająco małej kostce obciążenie m e bardzo różni się od działania $\varphi'(x)$. Zauważmy najpierw, że jeśli K jest mierzalny i φ jest dyfeomorfizmem to $\varphi(K)$ także jest mierzalny $\varphi(\partial K) = \partial(\varphi(K))$ oraz obrazem zbioru miary 0 jest zbiór miary 0.
(Dowód zostawiam jako ćwiczenie)

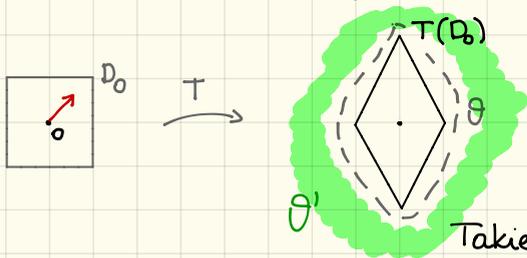
Lemat (3) Niech D będzie kostką o środku x i krawędzi l , tzn
 $D = [x^1 - \frac{l}{2}, x^1 + \frac{l}{2}] \times \dots \times [x^n - \frac{l}{2}, x^n + \frac{l}{2}]$, φ -dyfeomorfizmem określonym na zbiorze zawierającym D , $T = \varphi'(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: l < \delta \Rightarrow (1 - \varepsilon) m(T(D)) \leq m(\varphi(D)) \leq (1 + \varepsilon) m(T(D))$$

(czyli miara $\varphi(D)$ niewiele różni się od $m(\varphi'(x)(D))$)

Dowód: Zauważmy, że zawsze można sprowadzić problem do $x=0$, $\varphi(0)=0$ odpowiednio przesuwając zbiory i modyfikując φ o przesunięcie. Nie używajmy to m e miary. Dowodzimy \leq

D_0 - kostka o środku 0 i krawędzi 1. $D = lD_0$



θ otwarty, J -mierzalny i taki, że $T(D_0) \subset \theta$

$$m(\theta) \leq (1 + \varepsilon) m(T(D_0))$$

Takie θ da się wybrać, bo $T(D_0)$ jest mierzalny więc można go dowolnie przybliżyć od góry np sumą otwartych kostek.

$$\text{ale } l > 0 \text{ mamy } m(l\theta) \leq (1 + \varepsilon) m(T(lD_0))$$

Pokażemy, że istnieje taka kostka lD_0 dla wystarczająco małego l , że nie tylko $T(lD_0) \subset l\theta$ ale także $\varphi(lD_0) \subset l\theta$.

Istotnie zauważmy przede wszystkim że skoro $T D_0$ domknięty i

$$T D_0 \subset \Theta \text{ to } d(T D_0, \Theta^c) = \rho > 0 \quad d(T(L D_0), (L \Theta)^c) = \rho l$$

$$\varphi(h) = \varphi(\underset{0}{0}) + \underset{T}{\varphi'(0)} h + r(0, h) \quad h \in D_0$$

zatem istnieją $\delta > 0$ takie że $\forall l < \delta \quad \|\varphi(lh) - T(lh)\| = \|r(0, lh)\|$ 2. własności reszty
 $\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\|r(0, lh)\|}{\|lh\|} \rightarrow 0$

zatem dla $l < \delta$

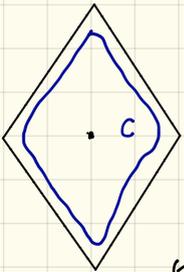
$$\varphi(l D_0) \subset T(l D_0)$$

$\|\varphi(lh) - T(lh)\| < \rho l \rightarrow$ każdy punkt $\varphi(l D_0)$ jest odległy od $T(l D_0)$ o mniej niż ρl tzn nie może należeć do $(l \Theta)^c$ zatem należy do $l \Theta$
 $\varphi(l D_0) \subset l \Theta$

$$m(\varphi(l D_0)) \leq m(l \Theta) \leq (1 + \epsilon) m(T(l D_0))$$

$$D = l D_0$$

Dowodzimy \geq zamiast przybliżać $T(D_0)$ z góry zbiorem Θ przybliżamy z dołu zbiorem zwartym i wypukłym C takim, że $C \subset \text{int} T(D_0)$



i takim, że $m(T(D_0)) \leq (1 + \epsilon) m(C)$

nierówność się skaluje
 $m(T(l D_0)) \leq (1 + \epsilon) m(l C)$

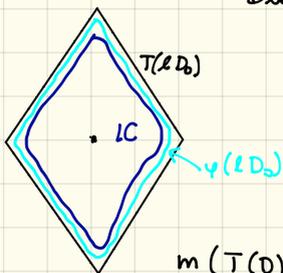
Tym razem $d(C, T(D_0)^c) = \rho' > 0 \quad d(l C, T(l D_0)^c) = \rho' l$

$$\varphi(l D_0) \subset T(l D_0)$$

← Bierzemy l takie, że

6
 Brzeg $\partial \varphi(LD_0)$ oddalony jest od $\partial T(LD_0)$ o mniej niż δ'
 LC oddalony jest od $\partial T(LD_0)$ o więcej niż δ' ten (+ wypukłość LC
 i fakt, że $LC \cap \varphi(LD_0) \neq \emptyset$) $LC \subset \varphi(LD_0)$

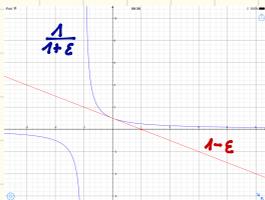
$$\text{Dla } \delta' \quad m(LC) \leq m(\varphi(LD_0)) \leq m(T(LD_0)) \leq (1+\varepsilon)m(LC)$$



$$m(LC) \leq m(\varphi(D)) \leq \underline{m(T(D))} \leq (1+\varepsilon)m(LC) \leq \underline{(1+\varepsilon)m(\varphi(D))}$$

$$m(T(D)) \leq (1+\varepsilon)m(\varphi(D))$$

$$(1-\varepsilon)m(T(D)) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} m(T(D)) \leq m(\varphi(D))$$



(4) Przechodzimy do zakończenia dowodu. Użyjemy sum wypunktowanych

$\int_K f = \int_K f \circ \varphi |\det \varphi'|$ Niech $K_i \subset E$ kostka. Bierzemy podział π kostki E taki żeby średnice kostek E_i były mniejsze niż δ . x_i - środek E_i

Wobec jednostajnej ciągłości φ na E średnice $\varphi(E_i) < M\delta$ dla pewnego M
 z lematu (3) mamy

$$(1-\varepsilon)m(\varphi(E_i)) \leq m(\varphi'(x_i)(E_i)) \leq (1+\varepsilon)m(\varphi(E_i))$$

$$\parallel$$

$$|\det \varphi'(x_i)| m(E_i)$$

Piszemy sumy wypunktowane dla obu całek

$$\int_K f \circ \varphi |\det \varphi'| \rightarrow \sum_i f \circ \varphi(x_i) |\det \varphi'(x_i)| m(E_i)$$

$$\int \varphi(K) f \rightarrow \sum_i f(\varphi(x_i)) m(\varphi(E_i))$$

↑ formalnie to nie jest suma wypunktowana względem podziału na kostki, bo $\varphi(E_i)$ nie jest kostką.

Jednak jest to podział $\varphi(K)$ na małe części o znanych powiększeniach - można go użyć.

Jeśli ktoś lubi być bardzo dokładny niech zastąpi ten podział podziałem o średnicy mniejszej niż $M\delta$.

$$\begin{aligned} & \left| \sum_i f \circ \varphi(x_i) |\det \varphi'(x_i)| m(E_i) - \sum_i f(\varphi(x_i)) m(\varphi(E_i)) \right| \leq \\ & \sup_{x \in K} |f| \sum_i \underbrace{|\det(\varphi'(x_i))| m(E_i) - m(\varphi(E_i))}_{\leq \varepsilon m(\varphi(E_i))} \leq \sup_K |f| \varepsilon \underbrace{\sum_i m(\varphi(E_i))}_{m(\varphi(K))} = \\ & = \sup_K |f| m(\varphi(K)) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

↑ może być dowolnie małe

Nierówność pokazuje jednocześnie całkowalność $f \circ \varphi$ na K oraz równość całek.

KONIEC
DOWODU