Analiza I – szesnasty

Katarzyna Grabowska

Badanie funkcji

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2} = x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}.$$

1. Dziedzina funkcji: Funkcja f jest określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

2. Punkty charakterystyczne:

wartość w $x = 0$	$f(0) = 0$
miejsca zerowe	$f(x) = 0 \iff x = 0$ lub $x = 1$
granice w $\pm\infty$	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Badanie funkcji

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2} = x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}.$$

1. Dziedzina funkcji: Funkcja f jest określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

2. Punkty charakterystyczne:

wartość w $x = 0$	$f(0) = 0$
miejsca zerowe	$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ lub $x = 1$
granice w $\pm\infty$	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Badanie funkcji

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2} = x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}.$$

1. Dziedzina funkcji: Funkcja f jest określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

2. Punkty charakterystyczne:

wartość w $x = 0$ $f(0) = 0$

miejsca zerowe $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ lub $x = 1$

granice w $\pm\infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Badanie funkcji

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2} = x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}.$$

1. Dziedzina funkcji: Funkcja f jest określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

2. Punkty charakterystyczne:

wartość w $x = 0$ $\quad f(0) = 0$

miejsca zerowe $\quad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ lub $x = 1$

granice w $\pm\infty$ $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Badanie funkcji

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2} = x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}.$$

1. Dziedzina funkcji: Funkcja f jest określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

2. Punkty charakterystyczne:

wartość w $x = 0$	$f(0) = 0$
miejsca zerowe	$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ lub $x = 1$
granice w $\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Badanie funkcji

3. Ciągłość: Funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$ jako złożenie funkcji ciągłych.

4. Asymptoty: Ponieważ dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}$ i funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$, nie ma asymptot pionowych. Ponieważ granice w nieskończonościach są nieskończone nie ma asymptot poziomych, mogą być asymptoty ukośne. Sprawdzamy to:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x} = x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} = (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}$$

Asymptoty w $\pm\infty$ mają postać $y = a_{\pm}x + b_{\pm}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 1 = a_{+}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 1 = a_{-}$$

Badanie funkcji

3. Ciągłość: Funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$ jako złożenie funkcji ciągłych.

4. Asymptoty: Ponieważ dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}$ i funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$, nie ma asymptot pionowych. Ponieważ granice w nieskończonościach są nieskończone nie ma asymptot poziomych, mogą być asymptoty ukośne.
Sprawdzamy to:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x} = x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} = (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}$$

Asymptoty w $\pm\infty$ mają postać $y = a_{\pm}x + b_{\pm}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 1 = a_{+}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 1 = a_{-}$$

Badanie funkcji

3. Ciągłość: Funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$ jako złożenie funkcji ciągłych.

4. Asymptoty: Ponieważ dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}$ i funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$, nie ma asymptot pionowych. Ponieważ granice w nieskończonościach są nieskończone nie ma asymptot poziomych, mogą być asymptoty ukośne. Sprawdzamy to:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x} = x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} = (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}$$

Asymptoty w $\pm\infty$ mają postać $y = a_{\pm}x + b_{\pm}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 1 = a_+$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 1 = a_-$$

Badanie funkcji

3. Ciągłość: Funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$ jako złożenie funkcji ciągłych.

4. Asymptoty: Ponieważ dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}$ i funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$, nie ma asymptot pionowych. Ponieważ granice w nieskończonościach są nieskończone nie ma asymptot poziomych, mogą być asymptoty ukośne. Sprawdzamy to:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x} = x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} = (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}$$

Asymptoty w $\pm\infty$ mają postać $y = a_{\pm}x + b_{\pm}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 1 = a_{+}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 1 = a_{-}$$

Badanie funkcji

3. Ciągłość: Funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$ jako złożenie funkcji ciągłych.

4. Asymptoty: Ponieważ dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}$ i funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$, nie ma asymptot pionowych. Ponieważ granice w nieskończonościach są nieskończone nie ma asymptot poziomych, mogą być asymptoty ukośne. Sprawdzamy to:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x} = x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} = (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}$$

Asymptoty w $\pm\infty$ mają postać $y = a_{\pm}x + b_{\pm}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 1 = a_+$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 1 = a_-$$

Badanie funkcji

3. Ciągłość: Funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$ jako złożenie funkcji ciągłych.

4. Asymptoty: Ponieważ dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}$ i funkcja jest ciągła na $\mathbb{R}$, nie ma asymptot pionowych. Ponieważ granice w nieskończonościach są nieskończone nie ma asymptot poziomych, mogą być asymptoty ukośne. Sprawdzamy to:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x} = x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} = (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}$$

Asymptoty w $\pm\infty$ mają postać $y = a_{\pm}x + b_{\pm}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 1 = a_+$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = 1 = a_-$$

Szukamy b_+, b_-:

$$b_+ = \lim_{x\to\infty} f(x) - a_+x = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^3} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)^2 - x^3}{(x(x-1)^2)^{\frac{2}{3}} + x(x(x-1)^2)^{\frac{1}{3}} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 - x}{x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x}}{(1-\frac{1}{x})^{\frac{4}{3}} + (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} + 1} = -\frac{2}{3}$$

Szukamy b_+, b_-:

$$b_+ = \lim_{x\to\infty} f(x) - a_+x = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^3} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)^2 - x^3}{(x(x-1)^2)^{\frac{2}{3}} + x(x(x-1)^2)^{\frac{1}{3}} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 - x}{x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x}}{(1-\frac{1}{x})^{\frac{4}{3}} + (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} + 1} = -\frac{2}{3}$$

Badanie funkcji

Szukamy b_+, b_-:

$$b_+ = \lim_{x\to\infty} f(x) - a_+x = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^3} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)^2 - x^3}{(x(x-1)^2)^{\frac{2}{3}} + x(x(x-1)^2)^{\frac{1}{3}} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 - x}{x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x}}{(1-\frac{1}{x})^{\frac{4}{3}} + (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} + 1} = -\frac{2}{3}$$

Badanie funkcji

Szukamy b_+, b_-:

$$b_+ = \lim_{x\to\infty} f(x) - a_+x = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^3} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)^2 - x^3}{(x(x-1)^2)^{\frac{2}{3}} + x(x(x-1)^2)^{\frac{1}{3}} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 - x}{x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x}}{(1-\frac{1}{x})^{\frac{4}{3}} + (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} + 1} = -\frac{2}{3}$$

Badanie funkcji

Szukamy b_+, b_-:

$$b_+ = \lim_{x\to\infty} f(x) - a_+x = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^3} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)^2 - x^3}{(x(x-1)^2)^{\frac{2}{3}} + x(x(x-1)^2)^{\frac{1}{3}} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 - x}{x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x}}{(1-\frac{1}{x})^{\frac{4}{3}} + (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} + 1} = -\frac{2}{3}$$

Badanie funkcji

Szukamy b_+, b_-:

$$b_+ = \lim_{x\to\infty} f(x) - a_+x = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^3} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)^2 - x^3}{(x(x-1)^2)^{\frac{2}{3}} + x(x(x-1)^2)^{\frac{1}{3}} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 - x}{x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} + x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x}}{(1-\frac{1}{x})^{\frac{4}{3}} + (1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} + 1} = -\frac{2}{3}$$

Badanie funkcji

Podobnie b_-:

$$b_- = \lim_{x \to -\infty} f(x) - a_- x = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x}}{(1 - \frac{1}{x})^{\frac{4}{3}} + (1 - \frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} + 1} = -\frac{2}{3}$$

Istnieje obustronna asymptota ukośna

$$y(x) = x - \frac{2}{3}$$

Badanie funkcji

Podobnie b_-:

$$b_- = \lim_{x \to -\infty} f(x) - a_- x = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x}}{(1 - \frac{1}{x})^{\frac{4}{3}} + (1 - \frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} + 1} = -\frac{2}{3}$$

Istnieje obustronna asymptota ukośna

$$y(x) = x - \frac{2}{3}$$

Badanie funkcji

Podobnie b_{-}:

$$b_{-} = \lim_{x \to -\infty} f(x) - a_{-}x = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x}}{(1 - \frac{1}{x})^{\frac{4}{3}} + (1 - \frac{1}{x})^{\frac{2}{3}} + 1} = -\frac{2}{3}$$

Istnieje obustronna asymptota ukośna

$$y(x) = x - \frac{2}{3}$$

4. Pierwsza pochodna:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)' =$$
$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} =$$
$$\left(x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}x\right) = \frac{x - \frac{1}{3}}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

Wzór na pochodną nie obowiązuje dla $x = 0$ i $x = 1$. Trzeba sprawdzić różniczkowalność oddzielnie z definicji.

$$f'(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x = \tfrac{1}{3}, \quad f(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]0, \tfrac{1}{3}[\, \cup \,]1, \infty[$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x \in \,]\tfrac{1}{3}, 1[$$

4. Pierwsza pochodna:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)' =$$

$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} =$$

$$\left(x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}x\right) = \frac{x-\frac{1}{3}}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

Wzór na pochodną nie obowiązuje dla $x = 0$ i $x = 1$. Trzeba sprawdzić różniczkowalność oddzielnie z definicji.

$$f'(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x = \tfrac{1}{3}, \quad f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]0, \tfrac{1}{3}[\, \cup \,]1, \infty[$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x \in \,]\tfrac{1}{3}, 1[$$

4. Pierwsza pochodna:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)' =$$
$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} =$$
$$\left(x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{3}(x-1)+\frac{2}{3}x\right) = \frac{x-\frac{1}{3}}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

Wzór na pochodną nie obowiązuje dla $x=0$ i $x=1$. Trzeba sprawdzić różniczkowalność oddzielnie z definicji.

$$f'(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x = \tfrac{1}{3}, \quad f(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in]-\infty, 0[\cup]0, \tfrac{1}{3}[\cup]1, \infty[$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x \in]\tfrac{1}{3}, 1[$$

4. Pierwsza pochodna:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)' =$$
$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} =$$
$$\left(x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}x\right) = \frac{x-\frac{1}{3}}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

Wzór na pochodną nie obowiązuje dla $x = 0$ i $x = 1$. Trzeba sprawdzić różniczkowalność oddzielnie z definicji.

$$f'(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x = \tfrac{1}{3}, \quad f(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in]-\infty, 0[\cup]0, \tfrac{1}{3}[\cup]1, \infty[$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x \in]\tfrac{1}{3}, 1[$$

4. Pierwsza pochodna:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)' =$$
$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} =$$
$$\left(x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}x\right) = \frac{x - \frac{1}{3}}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

Wzór na pochodną nie obowiązuje dla $x = 0$ i $x = 1$. Trzeba sprawdzić różniczkowalność oddzielnie z definicji.

$$f'(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x = \tfrac{1}{3}, \quad f(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in]-\infty, 0[\cup]0, \tfrac{1}{3}[\cup]1, \infty[$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x \in]\tfrac{1}{3}, 1[$$

4. Pierwsza pochodna:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)' =$$
$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} =$$
$$\left(x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}x\right) = \frac{x-\frac{1}{3}}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

Wzór na pochodną nie obowiązuje dla $x = 0$ i $x = 1$. Trzeba sprawdzić różniczkowalność oddzielnie z definicji.

$f'(x) = 0$ dla $x = \frac{1}{3}$, $f(\frac{1}{3}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

$f'(x) > 0$ dla $x \in]-\infty, 0[\cup]0, \frac{1}{3}[\cup]1, \infty[$

$f'(x) < 0$ dla $x \in]\frac{1}{3}, 1[$

Badanie funkcji

4. Pierwsza pochodna:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)' =$$
$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} =$$
$$\left(x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}x\right) = \frac{x-\frac{1}{3}}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

Wzór na pochodną nie obowiązuje dla $x = 0$ i $x = 1$. Trzeba sprawdzić różniczkowalność oddzielnie z definicji.

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 0 & \text{dla} & x = \frac{1}{3}, \;\; f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \\ f'(x) > 0 & \text{dla} & x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{3}\right[\cup \left]1, \infty\right[\\ f'(x) < 0 & \text{dla} & x \in \left]\frac{1}{3}, 1\right[\end{array}$$

Badanie funkcji

Badamy różniczkowalnosć w punktach $x = 0$ i $x = 1$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}(h-1)^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h-1)^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

Pochodna w $x = 0$ nie istnieje, podobnie w $x = 1$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^{\frac{1}{3}}(1+h-1)^{\frac{2}{3}}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(h+1)^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

Badamy różniczkowalnosć w punktach $x = 0$ i $x = 1$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}(h-1)^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h-1)^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

Pochodna w $x = 0$ nie istnieje, podobnie w $x = 1$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^{\frac{1}{3}}(1+h-1)^{\frac{2}{3}}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(h+1)^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

Badamy różniczkowalnosć w punktach $x = 0$ i $x = 1$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}(h-1)^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h-1)^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

Pochodna w $x = 0$ nie istnieje, podobnie w $x = 1$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^{\frac{1}{3}}(1+h-1)^{\frac{2}{3}}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(h+1)^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

Badanie funkcji

Badamy różniczkowalnosć w punktach $x = 0$ i $x = 1$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}(h-1)^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(h-1)^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

Pochodna w $x = 0$ nie istnieje, podobnie w $x = 1$:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^{\frac{1}{3}}(1+h-1)^{\frac{2}{3}}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{(h+1)^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

Badanie funkcji

Badamy różniczkowalnosć w punktach $x = 0$ i $x = 1$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}(h-1)^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h-1)^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

Pochodna w $x = 0$ nie istnieje, podobnie w $x = 1$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^{\frac{1}{3}}(1+h-1)^{\frac{2}{3}}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(h+1)^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

Badanie funkcji

Badamy różniczkowalnosć w punktach $x = 0$ i $x = 1$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}(h-1)^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h-1)^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

Pochodna w $x = 0$ nie istnieje, podobnie w $x = 1$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^{\frac{1}{3}}(1+h-1)^{\frac{2}{3}}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(h+1)^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

Badanie funkcji

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^{\frac{1}{3}}(1+h-1)^{\frac{2}{3}}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{(h+1)^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}=-\infty$$

Pierwsza pochodna jest $=0$ w $x=\frac{1}{3}$ i zmienia w tym punkcie znak z $+$ na $-$ zatem w tym punkcie funkcja ma maksimum lokalne.W punkcie $x=0$ funkcja nie jest różniczkowalna. W otoczeniu $x=0$ pochodna jest dodatnia zatem funkcja nie ma w tym punkcie ekstremum.W punkcie $x=1$ funkcja nie jest różniczkowalna, ale pochodna zmienia znak: dla $x\in]\frac{1}{3},1[$ pochodna jest ujemna a dla $]1,\infty[$ dodatnia, oznacza to, że f ma w $x=1$ minimum lokalne.

Badanie funkcji

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^{\frac{1}{3}}(1+h-1)^{\frac{2}{3}}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{(h+1)^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}} = -\infty$$

Pierwsza pochodna jest $= 0$ w $x = \frac{1}{3}$ i zmienia w tym punkcie znak z $+$ na $-$ zatem w tym punkcie funkcja ma maksimum lokalne.W punkcie $x = 0$ funkcja nie jest różniczkowalna. W otoczeniu $x = 0$ pochodna jest dodatnia zatem funkcja nie ma w tym punkcie ekstremum.W punkcie $x = 1$ funkcja nie jest różniczkowalna, ale pochodna zmienia znak: dla $x \in]\frac{1}{3}, 1[$ pochodna jest ujemna a dla $]1, \infty[$ dodatnia, oznacza to, że f ma w $x = 1$ minimum lokalne.

Badanie funkcji

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^{\frac{1}{3}}(1+h-1)^{\frac{2}{3}}}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{(h+1)^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}=-\infty$$

Pierwsza pochodna jest $=0$ w $x=\frac{1}{3}$ i zmienia w tym punkcie znak z $+$ na $-$ zatem w tym punkcie funkcja ma maksimum lokalne. W punkcie $x=0$ funkcja nie jest różniczkowalna. W otoczeniu $x=0$ pochodna jest dodatnia zatem funkcja nie ma w tym punkcie ekstremum. W punkcie $x=1$ funkcja nie jest różniczkowalna, ale pochodna zmienia znak: dla $x\in\,]\frac{1}{3},1[$ pochodna jest ujemna a dla $]1,\infty[$ dodatnia, oznacza to, że f ma w $x=1$ minimum lokalne.

Badanie funkcji

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^{\frac{1}{3}}(1+h-1)^{\frac{2}{3}}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{(h+1)^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}=-\infty$$

Pierwsza pochodna jest $=0$ w $x=\frac{1}{3}$ i zmienia w tym punkcie znak z $+$ na $-$ zatem w tym punkcie funkcja ma maksimum lokalne.W punkcie $x=0$ funkcja nie jest różniczkowalna. W otoczeniu $x=0$ pochodna jest dodatnia zatem funkcja nie ma w tym punkcie ekstremum.W punkcie $x=1$ funkcja nie jest różniczkowalna, ale pochodna zmienia znak: dla $x\in]\frac{1}{3},1[$ pochodna jest ujemna a dla $]1,\infty[$ dodatnia, oznacza to, że f ma w $x=1$ minimum lokalne.

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^{\frac{1}{3}}(1+h-1)^{\frac{2}{3}}}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{(h+1)^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}=-\infty$$

Pierwsza pochodna jest $=0$ w $x=\frac{1}{3}$ i zmienia w tym punkcie znak z $+$ na $-$ zatem w tym punkcie funkcja ma maksimum lokalne.W punkcie $x=0$ funkcja nie jest różniczkowalna. W otoczeniu $x=0$ pochodna jest dodatnia zatem funkcja nie ma w tym punkcie ekstremum.W punkcie $x=1$ funkcja nie jest różniczkowalna, ale pochodna zmienia znak: dla $x\in]\frac{1}{3},1[$ pochodna jest ujemna a dla $]1,\infty[$ dodatnia, oznacza to, że f ma w $x=1$ minimum lokalne.

5. Druga pochodna: Obliczamy tam, gdzie f' jest różniczkowalna

$$f''(x) = \left((x-\frac{1}{3})(x)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)' = (x)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} +$$

$$(x-\frac{1}{3})\left(-\frac{2}{3}\right)(x)^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} + (x-\frac{1}{3})(x)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)(x-1)^{-\frac{4}{3}} =$$

$$(x)^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{4}{3}}\left(x(x-1)+(x-\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(x-1)+(-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})x\right) =$$

$$= \frac{-\frac{2}{9}}{(x)^{\frac{5}{3}}(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$f''(x) > 0$ dla $x \in]-\infty, 0[$ funkcja wypukła
$f''(x) < 0$ dla $x \in]0, \infty[$ funkcja wklęsła

5. Druga pochodna: Obliczamy tam, gdzie f' jest różniczkowalna

$$f''(x) = \left((x-\frac{1}{3})(x)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)' = (x)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} +$$

$$(x-\frac{1}{3})\left(-\frac{2}{3}\right)(x)^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} + (x-\frac{1}{3})(x)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)(x-1)^{-\frac{4}{3}} =$$

$$(x)^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{4}{3}}\left(x(x-1)+(x-\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(x-1)+(-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})x\right) =$$

$$= \frac{-\frac{2}{9}}{(x)^{\frac{5}{3}}(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$f''(x) > 0$ dla $x \in]-\infty, 0[$ funkcja wypukła

$f''(x) < 0$ dla $x \in]0, \infty[$ funkcja wklęsła

5. Druga pochodna: Obliczamy tam, gdzie f' jest różniczkowalna

$$f''(x) = \left((x-\frac{1}{3})(x)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)' = (x)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} +$$
$$(x-\frac{1}{3})\left(-\frac{2}{3}\right)(x)^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} + (x-\frac{1}{3})(x)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)(x-1)^{-\frac{4}{3}} =$$
$$(x)^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{4}{3}}\left(x(x-1) + (x-\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(x-1) + (-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})x\right) =$$
$$= \frac{-\frac{2}{9}}{(x)^{\frac{5}{3}}(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$f''(x) > 0$ dla $x \in]-\infty, 0[$ funkcja wypukła
$f''(x) < 0$ dla $x \in]0, \infty[$ funkcja wklęsła

Badanie funkcji

5. Druga pochodna: Obliczamy tam, gdzie f' jest różniczkowalna

$$f''(x) = \left((x-\frac{1}{3})(x)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)' = (x)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} +$$

$$(x-\frac{1}{3})\left(-\frac{2}{3}\right)(x)^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} + (x-\frac{1}{3})(x)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)(x-1)^{-\frac{4}{3}} =$$

$$(x)^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{4}{3}}\left(x(x-1)+(x-\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(x-1)+(-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})x\right) =$$

$$= \frac{-\frac{2}{9}}{(x)^{\frac{5}{3}}(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$f''(x) > 0$ dla $x \in]-\infty, 0[$ funkcja wypukła
$f''(x) < 0$ dla $x \in]0, \infty[$ funkcja wklęsła

5. Druga pochodna: Obliczamy tam, gdzie f' jest różniczkowalna

$$f''(x) = \left((x-\frac{1}{3})(x)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)' = (x)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} +$$

$$(x-\frac{1}{3})\left(-\frac{2}{3}\right)(x)^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}} + (x-\frac{1}{3})(x)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)(x-1)^{-\frac{4}{3}} =$$

$$(x)^{-\frac{5}{3}}(x-1)^{-\frac{4}{3}}\left(x(x-1) + (x-\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(x-1) + (-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})x\right) =$$

$$= \frac{-\frac{2}{9}}{(x)^{\frac{5}{3}}(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$f''(x) > 0$	dla	$x \in \,]-\infty, 0[$	funkcja wypukła
$f''(x) < 0$	dla	$x \in \,]0, \infty[$	funkcja wklęsła

Badanie funkcji

6. Tabelka:

x	$-\infty$			0		$\frac{1}{3}$		1			∞
f'	$+$	$+$	$+$	$+\infty \mid +\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	$+$	$+$	$\mid$	$-$	$-$	$-$	$\mid$	$-$	$-$	$-$
f	$-\infty$	$\uparrow$	$\uparrow$	0	$\uparrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

7. Wykres: