ANALIZA I R
2 i 5 października 2015

Wstęp: teoria mnogości, injektywność, surjektywność

Javier de Lucas

Zadanie 1. Opisać i naszkicować na płaszczyźnie następujące zbiory:

$$(a)\quad \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq k(x-y)\},$$
$$(b)\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+2y^2-3nx+4ny\leq 0\},$$
$$(c)\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\leq nx\},$$
$$(d)\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y^2\geq nx^2\},$$
$$(e)\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2-3nx+4ny\leq 25\},$$

gdzie $\mathbb{N}:=\{1,2,3,\ldots\}$.

Zadanie 2. Znaleźć zbiory:

$$(a)\quad \bigcup_{t\in[0,+\infty[} A_t,\qquad A_t:=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 2t(2x-t)\},$$
$$(b)\quad \bigcap_{t\in[-1,1]} B_t,\qquad \bigcup_{t\in[-1,1]} B_t,\qquad B_t:=[t+1,t-1]\times[-2t-1,2t],$$

gdzie $[a,b]:=\{x\in\mathbb{R}:\min(a,b)\leq x\leq\max(a,b)\}$.

Zadanie 3. Wykazać tożsamości:

(a) $A\cup(B\setminus C)=[(A\cup B)\setminus C]\cup(A\cap C)$,

(b) $A\setminus[B\setminus(C\setminus D)]=(A\setminus B)\cup[(A\cap C)\setminus D]$,

(c) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}A_i=(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_3)\cup\cdots\cup(A_{n-1}\setminus A_n)\cup A_n,\quad n\geq 2,$

(d) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}A_i=[A_1\setminus(A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n)]\cup\cdots\cup[A_{n-1}\setminus A_n]\cup A_n,$

(e) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}A_i=(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_3)\cup\cdots\cup(A_{n-1}\setminus A_n)\cup(A_n\setminus A_1)\cup(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n).$

Zadanie 4. Zbadać injektywność i surjektywność odwzorowania, opisać jego zbiór wartości i poziomice:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ \ f(t):=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right),\\
&\text{(b)}\quad g:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R},\ \ g(x,y):=\frac{x}{x^2+y^2},\\
&\text{(c)}\quad h:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z},\ \ h(k):=2k^2-3k+1,
\end{aligned}$$

gdzie $[a,b]:=\{x\in\mathbb{R}:\min(a,b)\le x\le \max(\mathrm{a},\mathrm{b})\}$.

Zadanie 5. Odwzorowanie $f:X\to X$ spełnia warunek

$$\forall x\in X,\quad \exists n\in\mathbb{N},\quad f^n(x)=x.$$

Udowodnić, że odwzorowanie f jest bijekcją. Symbol f^n oznacza tu $n-$krotne złożenie odwzorowania f ze sobą, tzn $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{\times n}$.

Zadanie 6. Podać przykład bijekcji między zbiorami X i Y jeśli

$$\begin{aligned}
&(a)\ X=[0,1[,\quad Y=[0,1],\\
&(b)\ X=]0,1[,\quad Y=[-2,2]\setminus\{-1,2\},\\
&(c)\ X=\mathbb{N}\times\mathbb{N},\quad Y=\mathbb{N}.
\end{aligned}$$