ANALIZA I R
8 i 11 października 2015

Symbole Newtona, relacje i relacje równoważności

Javier de Lucas

Zadanie 1. Dowieść, że liczby Fibonacciego, zdefiniowane rekurencją $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ mogą być otrzymane ze wzoru

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}.$$

Należy pamietać, że $\binom{n-k}{k} = 0$ zawsze jeśli $n - k < k$. Z definicji, dla $m > k$ $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$.

Zadanie 2. Niech R będzie dowolną relacją w zbiorze $\{-1, 0, 1\}$. Określmy funkcję $d_R : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem:

$$d(x, y) := \begin{cases} \|x - y\|, & \text{gdy } (\mathrm{sgn} x_1 , \mathrm{sgn} y_1) \in R \\ \|x\| + \|y\|, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

,
gdzie $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ dla $x \in \mathbb{R}^2$. Wykazać, że:

- (a) $[d_R(x, y) = 0 \iff x = y] \iff R$ jest zwrotna,
- (b) $[d_R$ jest symetryczna, tzn. $d_R(x, y) = d_R(y, x)\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2] \iff R$ jest symetryczna,
- (c) d_R spełnia nierówność trójkąta $\iff R$ jest przechodnia.

Zadanie 3. Sprawdzić, że dana relacja jest relacją równoważności w R. Opisać jej klasy równoważności i narysować odpowiadający jej podzbiór $S \subset R \times R$. Znaleźć funkcję $f : R \to R$, której poziomice są klasami równoważności:
(a) $x \sim y \iff (x - y)(1 - xy) = 0$,
(b) $x \sim y \iff (x = y$ lub $x = -y \in [-1, 1]$ lub $|x| + |y| = 1)$,
(c) $x \sim y \iff (x = y$ lub $\exists n \in \mathbb{Z} : x, y \in [2n - 1, 2n])$,
(d) $x \sim y \iff (x - y \in \mathbb{Z}$ lub $x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z})$.