ANALIZA I R
19 października 2015

Nierówności

Javier de Lucas

Zadanie 1. (Nierówność Jensena) Niech będzie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że

$$f(tx_1 + (t-1)x_0) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \qquad \forall t \in [0,1].$$

Wtedy

$$x_1, \ldots, x_n > 0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0,\ \sum_{i=1}^n \alpha_1 = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

Zadanie 2. (Nierówność Cauchyego) Korzystając z faktu, że

$$\alpha_1 \log(x_1) + \alpha_2 \log(x_2) \leq \log\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right), \qquad \forall x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

wykaż, że dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ wynika, że

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_i}{n}$$

Zadanie 3. (Nierówność Höldera) Udowodnij, że

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right),$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geq 0$, $p > 1$ i $1/p + 1/q = 1$.

Zadanie 4. (Nierówność Bernouillego) Udowodnij, że

$$(a) \quad \frac{2n}{2n-1} \leq \sqrt[n]{2} \leq \frac{n+1}{n}, \qquad (b) \quad 2^n \geq n, \quad n \geq 450.$$

.

Zadanie 5. Wykaz, że

$$n! \geq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

.

Zadanie 6. Wykaz, że dla $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(a)\ \text{jeśli} m < n, \text{to} \sqrt[m+1]{n+1} < \sqrt[m]{n}, \qquad (b)\ \text{jeśli}\ m \geq n(n-1), \text{to}\ \sqrt[m+1]{n+1} > \sqrt[m]{n}.$$

.