## ZADANIA DOMOWE Z ANALIZY I R

1. Niech $\alpha : X \longrightarrow Y$, $\beta : Y \longrightarrow X$, $\gamma : X \longrightarrow X$. Wykazać, że:
   - $\alpha$ jest injektywne $\iff \forall A \subset X \; A = f^{-1}(f(A))$;
   - $\alpha$ jest surjektywne $\iff \forall B \subset Y \; B = f(f^{-1}(B))$;
   - $[\alpha \circ \gamma = \alpha,\ \alpha$ injektywne$] \Rightarrow\ \gamma = \mathrm{id}_X$;
   - $[\gamma \circ \beta = \beta,\ \beta$ surjektywne $] \Rightarrow\ \gamma = \mathrm{id}_X$;
   - $[\forall x \in X : \exists n \in \mathbb{N} : \underbrace{\gamma \cdot \cdots \cdot \gamma}_{n}(x) = x] \ \Rightarrow\ \gamma$ jest bijektywne.

2. Niech $r$ będzie relacją z $A$ do $B$, a $q$ relacją z $B$ do $C$. Definiujemy złożenie $q \circ r$ tych relacji jako relację z $A$ do $C$ daną następującym warunkiem: *$a \in A$ jest w relacji $q \circ r$ z $c \in C$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $b \in B$ takie, że $a$ jest w relacji $r$ z $b$ i $b$ jest w relacji $q$ z $c$.* Czy złożenie relacji równoważności jest relacją równoważności?

3. Niech $X = [-1, 1]$ i niech $\mathcal{R} = \big\{(x, y) \in X \times X \,\big|\, x - y \in \mathbb{Z}$ lub $x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}\big\}$. Sprawdź, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności w zbiorze $X$, znajdź klasy abstrakcji $\mathcal{R}$ i narysuj zbiór $\mathcal{R}$.

4. Rozważmy następujące relacje na zbiorze $\mathbb{R}$:
a) $x \sim y \ \Leftrightarrow\ \big(x = y$ lub $x = -y \in [-1, 1]$ lub $|x| + |y| = 1\big)$,
b) $x \sim y \ \Leftrightarrow\ \big(x = y$ lub $\exists n \in \mathbb{Z}\; x, y \in [2n - 1, 2n]\big)$.
W każdym z powyższych przypadków wykaż, że relacja $\sim$ jest relacją równoważności w $\mathbb{R}$, narysuj zbiór $\big\{(x, y) \,\big|\, x \sim y\big\}$, opisz klasy abstrakcji relacji $\sim$ i wskaż funkcję $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, której poziomicami są te klasy.

5. Udowodnij, że dla $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$\Big( [x] + y \geq 0 \Big) \iff \Big( [y] + x \geq 0 \Big)$$

($[a]$ oznacza część całkowitą liczby $a$). Podaj przykłady pokazujące, że zastępując nierówności "$\geq$" nierównościami "$>$" otrzymamy zdania fałszywe.

6. Niech $\mathbb{R}_+ = \big\{t \in \mathbb{R} \,\big|\, t > 0\big\}$. Udowodnij, że odwzorowanie $f \colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \big(x + y, \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{y}\big)$$

jest bijekcją.

7. Zbadaj injektywność i surjektywność odwzorowania $f$ w następujących przypadkach:
a) $f \colon K \to T$, gdzie

$$K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\big\},$$
$$T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\big\}$$

oraz

$$f(x, y) = \big(\tfrac{\max\{x,y\}}{x+y} x,\ \tfrac{\max\{x,y\}}{x+y} y\big),$$

b) $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(k) = \frac{|4k-1|+1}{2}$,
c) $f \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(m, n) = m + n\sqrt{2}$,
d) $f \colon \mathbb{Z} \to \big\{\frac{n(n+1)}{2} \,\big|\, n \in \mathbb{Z}_+\big\}$, $f(k) = 2k^2 - k$,
e) $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(k, l) = 2^{k-1}(2l - 1)$.

8. Korzystając z nierówności Jensena wykaż, że

$$\sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 - b^2} \leq \sqrt{4 - (a + b)^2}, \qquad -1 \leq a, b \leq 1.$$

---

Seria 1.

9. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla każdego $x$ takiego, że: $-1 < x < \frac{1}{n+1}$ zachodzi nierówność
$$(1+x)^n \leq 1 + \frac{nx}{1+(1-n)x}.$$

10. Wykazaż, że
a) $\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n < \frac{n}{n-1}$ dla $n \geq 2$,
b) $\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$ dla $a > 1$,
c) $n^n > (n+1)^{n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}$,
d) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.