ZADANIA DOMOWE Z ANALIZY I R
SERIA II

1. Obliczyć następujące granice:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(n+4\sqrt{n^2+n}-2\sqrt{n^2-n}-3\sqrt{n^2+2n}\right), \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+\sqrt{n^3+\sqrt{n^5}}}-\sqrt{n^2+\sqrt{n^3}},$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\left(1+\frac{p}{n}\right)^q-\left(1+\frac{q}{n}\right)^p\right], \qquad p,q\in\mathbb{N}.$$

2. Obliczyć:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}+5}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3\sqrt{n}-5}{3\sqrt{n-2}}\right)^{1-2\sqrt{n}}.$$

3. Obliczyć korzystając z twierdzenia Stolza:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{(1+n)\sqrt{n}}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1^5+\ldots+n^5}{n^5}-\frac{n}{6}$$

4. Zbadać zbieżność ciągu (x_n), ewentualnie obliczyć granicę

$$\lim_{n\to+\infty} n\log\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}, \quad \lim_{n\to+\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{n(n+1)}\right), \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{5}-\sqrt[n]{3}},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\log^{-1}(n)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right), \quad \lim_{n\to+\infty} n^3\left(\sqrt[n]{n^2+a}-\sqrt[n]{n^2+b}\right), \quad a,b\in\mathbb{R}.$$

5. Wykaż, że istnieje granica

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n)\right).$$

Granica ta, to tzw. *stała Eulera*. Nie wiadomo obecnie, czy ta stała jest liczbą wymierną czy nie.

6. Niech X będzie zbiorem wszystkich ciągów liczb rzeczywistych. Dla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niech

$$\rho(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}.$$

Czy (X,ρ) jest przestrzenią metryczną?

7. Dla $x,y\in[0,1]$ określamy funkcję ρ następująco:

$$\rho(x,y) := \begin{cases} |x-y|, & x-y\in\mathbb{Q},\\ 2, & x-y\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Czy ρ jest metryką w zbiorze $[0,1]$.

8. Które z następujących podzbiorów płaszczyzny Euklidesowej są domknięte? Otwarte? Ograniczone? Spójne? Zwarte?

- $\{(x,y): x^2+y^2\le 9\}$,
- $\{(x,y): x^2+y^2\in\mathbb{N}\}$,
- $\{(x,y): \sin(x)\le y\le 2\}$,
- $\{(x,y): x^4-4x^2+2\le 0\}$.

Seria 2.

9. Czy zbiór $A \cup B$, gdzie

$$A = \{(0,y) : y \in [-1,1]\}, \qquad B = \{(x, \sin 1/x) : x \in]0, 1/\pi]\},$$

czyli *Sinusoida zagęszczona*, jest spójny?

10. Wykaż, że tylko $\mathbb{R}^n$ i pusty zbiór są otwarte i domknięte jednocześnie na $\mathbb{R}^n$ z standardową topologią.

11. W zbiorze $\mathbb{R}$ rozważamy naturalną metrykę. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{gdy } x = p/q, (p,q) = 1, \\ 0, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \end{cases}$$

gdzie (p,q) jest największym wspólnym dzielnikiem p i q. Zbadać w jakich punktach funkcja f jest ciągła.

12. Zbadać ciągłość *funkcji Dirichleta*

$$f(x) := \lim_{m \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} \cos^{2n}(m!\pi x).$$

13. Pokazać, że funkcja monotoniczna na przedziale ma co najwyżej przeliczalną ilość punktów nieciągłości.