# ZADANIA DOMOWE Z ANALIZY I R

## Pochodne, granice, różniczkowalność

1. Ustalmy liczbę $\epsilon \in ]0,1[$. Zdefiniujmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w następujący sposób: dla $x \geq 0$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^3}{3\epsilon} & 0 \leq x < \epsilon, \\ 1 + \epsilon - \frac{\epsilon^2}{12} - \left(x - 1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^2 & \epsilon < x \leq 1, \\ 1 + \epsilon + \frac{1}{3\epsilon}(x - 1 - \epsilon)^3 & 1 < x \leq 1 + \epsilon, \\ 1 + \epsilon & x > 1 + \epsilon, \end{cases}$$

a dla $x < 0$ kładziemy $f(x) = -f(-x)$. Wykaż, że $f$ należy do klasy $\mathrm{C}^2(\mathbb{R})$.

2. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x(\cos x - 1)}$,

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x \log(1 + \mathrm{e}^{2x})}$.

3. Wykaż, że dla $x \in ]1,2[$ spełniona jest nierówność

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) < \frac{x}{2 - x}.$$

## Badanie funkcji

4. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f$ i naszkicuj jej wykres dla

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)\operatorname{arctg}(x)$,

b) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - x}$,

c) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x - 1}$,

d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$,

e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 17}{\sqrt{x^2 + 2}}$,

f) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$,

## O.D.Z.S.

5. Określ otwartość, domkniętość, zwartość i spójność zbioru $A$ dla

a) $A = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}\; x_k \notin \mathbb{Z}\right\}$,

b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 < 1,\ |y| < |x|\right\} \cup \{(0,0)\}$,

c) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x^2 - 3x \leq e^x\right\}$,

d) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geq \sqrt{1 + x^2}\right\} \cap \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = px^2 + \frac{1}{2p}\right\}$, $p \in ]0, +\infty[$ – parametr,

e) $A = \left\{x \in \mathbb{R} :\ 6x^{10} - 5x^8 - 4x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 1 < 0\right\}$.

We wszystkich przykładach rozważamy standardową metrykę na $\mathbb{R}^k$.

6. W przestrzeni $\mathrm{C}\big([0,1]\big)$ wprowadzamy metrykę

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} \big|f(x) - g(x)\big|.$$

Rozważmy podzbiór $S$ przestrzeni $\mathrm{C}\big([0,1]\big)$ zdefiniowany jako

$$S = \left\{f \in \mathrm{C}\big([0,1]\big) \,\middle|\, f\left(\tfrac{k}{10}\right) = 1 \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, 10\right\}.$$

Zbadaj czy $S$ jest otwarty, domknięty, zwarty, spójny.

---

Seria przedświąteczna.

## Zwartość

7. Niech $X$ będzie przestrzenią zwartą i niech $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ będzie rodziną podzbiorów domkniętych przestrzeni $X$ mającą tę własność, że

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, \lambda_1, \dots \lambda_n \in \Lambda \quad F_{\lambda_1} \cap \dots \cap F_{\lambda_n} \neq \emptyset.$$

Udowodnij, że $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.

## Całki

8. Oblicz całki nieoznaczone:

a) $\int x^2 \log(x)\, dx$,

b) $\int \sin(x)\log(x)\, dx$,

c) $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$,

d) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$,

e) $\int x^n e^{-x}\, dx \qquad (n \in \mathbb{N})$,

f) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad (n \in \mathbb{N})$,

g) $\int \frac{2x^2+1}{(x-1)(x^2+1)}\, dx$,

h) $\int x \operatorname{arctg}(x^2)\, dx$,

i) $\int \frac{dx}{\sin(x)(2\cos^2 x + 1)}$,

j) $\int (2x^2+1)\sinh(x)\, dx$,

k) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$,

9. Oblicz $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\sin(x)^2}$.