EGZAMIN PISEMNY Z ANALIZY I R

Instrukcja obsługi. Za każde zadanie można dostać 4 punkty. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na osobnej kartce starannie i czytelnie. W nagłówku rozwiązania należy umieścić **numer zadania, imię i nazwisko, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**.

1. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$ i narysuj jej wykres.

2. Zbadaj zbieżność szeregów

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+\alpha}\,\right)$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}\right)$.

W punkcie (1) α jest rzeczywistym parametrem.

3. Zbadaj otwartość, domkniętość, zwartość i spójność zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ (ze standardową metryką) dla

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_i \notin \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, n \right\}$$

4. Oblicz promień zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n^2+3n)x^n$, wykorzystaj ten wynik do obliczenia sumy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n}{7^n}$.

5. Oblicz całkę $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.

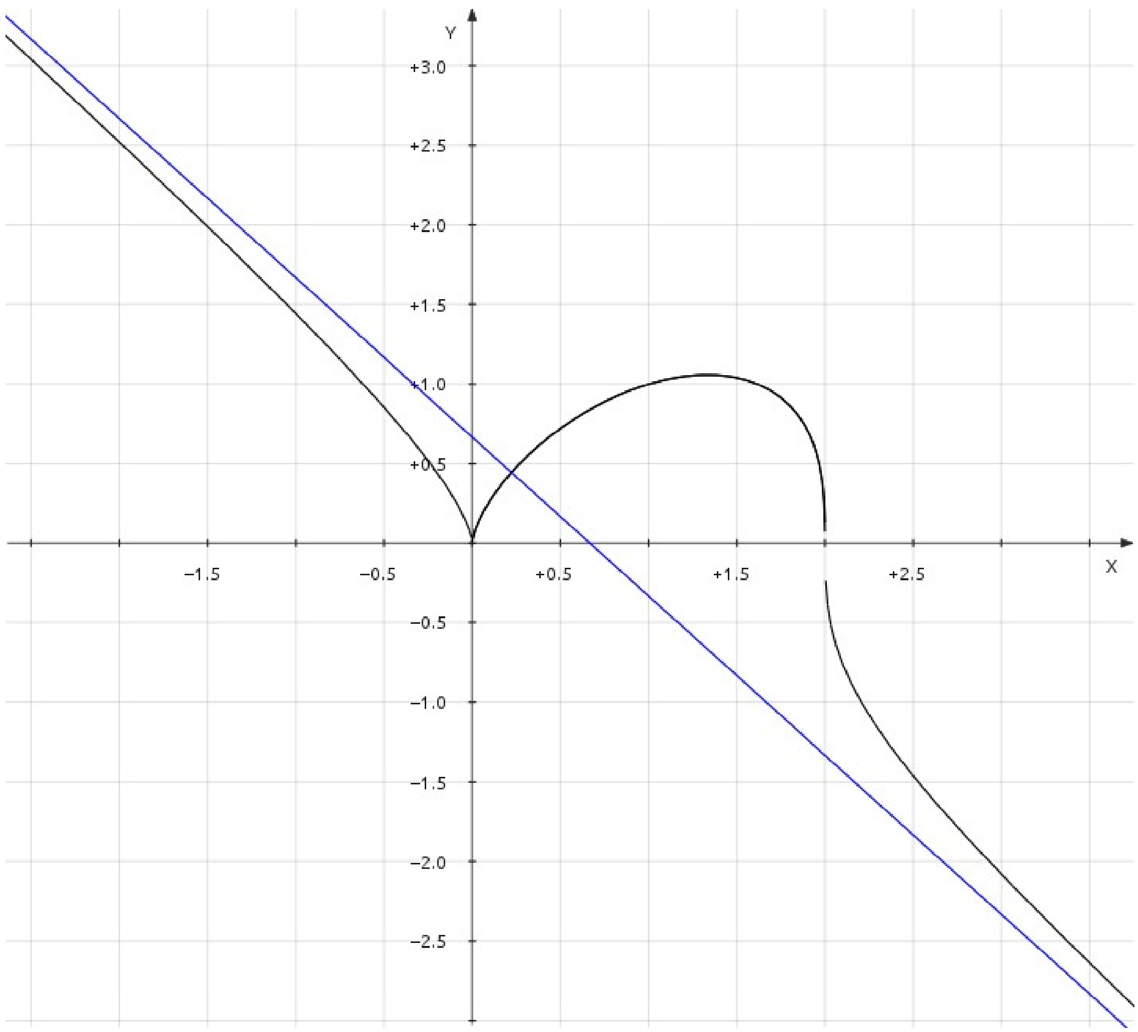
Data 29 stycznia 2016 r.

Rozwiązania

Zadanie **1**.

- Funkcja f jest gładka na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0,2\}$, a ciągła na $\mathbb{R}$.
- $f(x) > 0$ dla $x \in]-\infty, 0[\cup]0,2[$, $f(0) = 0$, $f(x) < 0$ dla $x > 2$. W szczególności w punkcie 0 funkcja f ma lokalne minimum.
- Ponieważ
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$$
i f jest ciągła, zbiorem wartości f jest całe $\mathbb{R}$. W szczególności f nie ma globalnych ekstremów.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$.
- Na $\mathbb{R} \setminus \{0,2\}$ mamy
$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{x(4-3x)}{\big(x^2(x-2)\big)^{\frac{2}{3}}},$$
$$f''(x) = \frac{9}{8(x-2)^{\frac{5}{3}}x^{\frac{4}{3}}}.$$
Stąd $f''(x) \neq 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{0,2\}$, a f' ma jedno zero w punkcie $\frac{4}{3}$.
$$f'(x) > 0 \iff x \in \left]0, \tfrac{4}{3}\right[,$$
$$f''(x) > 0 \iff x > 2.$$
Stąd w punkcie $\frac{4}{3}$ funkcja f ma lokalne maksimum, $f\big(\frac{4}{3}\big) = \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$.
- Mamy
$$\lim_{x\to0^\pm} f'(x) = \frac{1}{3\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\lim_{x\to0^\pm}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \pm\infty$$
oraz
$$\lim_{x\to2^\pm} f'(x) = \frac{-4}{3\cdot 4^{\frac{2}{3}}}\lim_{x\to2^\pm}\frac{1}{(2-x)^{\frac{2}{3}}} = -\infty.$$
W szczególności f nie jest różniczkowalna w punktach 0 i 2 (bo jest w tych punktach ciągła i z tw. Lagrange'a wynika, że jeśli byłaby różniczkowalna w którymś z tych punktów, to pochodna miałaby tam skończoną granicę).
- Znając znak f'' określamy przedziały wklęsłości i wypukłości: f jest wklęsła na $]-\infty, 0[$ oraz na $]0,2[$, a wypukła na $]2, +\infty[$.
- Funkcja f nie ma asymptot poziomych ani pionowych. Mamy
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2-x}{x}} = -1,$$
a podstawiając do wzoru $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ wartości $a = f(x)$, $b = -x$ otrzymujemy
$$\begin{aligned} f(x) + x &= \frac{f(x)^3 + x^3}{\big(x^2(2-x)\big)^{\frac{2}{3}} - x\big(x^2(2-x)\big)^{\frac{1}{3}} + x^2} \\ &= \frac{2x^2}{\big(x^2(2-x)\big)^{\frac{2}{3}} - x\big(x^2(2-x)\big)^{\frac{1}{3}} + x^2} \\ &= \frac{2}{\big(\frac{(2-x)}{x}\big)^{\frac{2}{3}} - \big(\frac{(2-x)}{x}\big)^{\frac{1}{3}} + 1}, \end{aligned}$$
skąd wniosek, że
$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) + x\big) = \frac{2}{3}$$
i prosta $y = -x + \frac{2}{3}$ jest obustronną asymptotą dla f.

- Równanie $f(x) = -x + \frac{2}{3}$ rozwiązujemy podnosząc obie strony do trzeciej potęgi. Wówczas otrzymujemy $x = \frac{2}{9}$. Ponieważ $f\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}$, punkt $\left(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right)$ jest jedynym punktem przecięcia wykresu f z asymptotą. Z wklęsłości/wypukłości f wnioskujemy, że dla $x > \frac{2}{9}$ wykres f leży nad asymptotą, a dla $x < \frac{2}{9}$ pod nią.



Wykres funkcji f

$\square$

Zadanie **2**. Ad (1). Niech a_n oznacza wyraz ogólny badanego szeregu. Jeśli $\alpha = 0$, to $a_n = 0$ dla wszystkich n, a więc dla $\alpha = 0$ szereg $\sum a_n$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**). Załóżmy teraz, że $\alpha \neq 0$. Mamy

$$\begin{aligned}
\sin\bigl(\pi\sqrt{n^2+\alpha}\,\bigr) &= \sin\Bigl(\pi\left(n + \bigl(\sqrt{n^2+\alpha}-n\bigr)\right)\Bigr) \\
&= \cos(\pi n)\sin\Bigl(\pi\bigl(\sqrt{n^2+\alpha}-n\bigr)\Bigr) + \sin(\pi n)\cos\Bigl(\pi\bigl(\sqrt{n^2+\alpha}-n\bigr)\Bigr) \\
&= \cos(\pi n)\sin\Bigl(\pi\bigl(\sqrt{n^2+\alpha}-n\bigr)\Bigr) + 0 \\
&= (-1)^n\sin\Bigl(\pi\bigl(\sqrt{n^2+\alpha}-n\bigr)\Bigr)
\end{aligned}$$

Ciąg $\bigl(|a_n|\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący (dla $f(x) = \sqrt{x^2+\alpha} - x$ mamy $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}} - 1 < 0$), więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\bigl(\pi\sqrt{n^2+\alpha}\,\bigr)$ jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza. Jednak

$$|a_n| = \sin\Bigl(\pi\bigl(\sqrt{n^2+\alpha}-n\bigr)\Bigr) = \sin\left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{n^2+\alpha}+n}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{Cn}\right),$$

dla pewnej stałej $C > 0$. Ponadto

$$\frac{\sin\frac{\pi}{Cn}}{\frac{\pi}{Cn}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

więc dla $\alpha \neq 0$ szereg $\sum |a_n| = +\infty$, czyli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\bigl(\pi\sqrt{n^2+\alpha}\,\bigr)$ jest **zbieżny warunkowo**.

Ad (2). Rozważmy funkcję $f(x) = 1 - (1-x)^x = 1 - \exp\bigl(x\log(1-x)\bigr)$. Mamy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^2} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\exp\bigl(x\log(1-x)\bigr)\bigl(\log(1-x) - \frac{x}{1-x}\bigr)}{2x} \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x) - \frac{x}{1-x}}{x} \\
&\overset{\text{H}}{=} -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Ponieważ $a_n = f\bigl(\frac{1}{n}\bigr)$, powyższy rachunek pokazuje, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

a zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Bigl(1 - \sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}\Bigr)$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**). $\square$

Zadanie 3. Rozważmy na $\mathbb{R}^n$ metrykę d_∞. Jest ona równoważna standardowej (d_2), więc pojęcia otwartości, domkniętości, zwartości i spójności będą identyczne dla obu metryk. Zbiór A jest sumą kul: niech

$$v = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

wtedy

$$A = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^n + v} K\bigl(x, \tfrac{1}{2}\bigr).$$

Stąd A **jest otwarty**. Dopełnieniem A jest suma płaszczyzn:

$$\mathbb{R}^n \setminus A = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \bigm| \text{istnieje } i \text{ takie, że } x_i \in \mathbb{Z}\bigr\}.$$

W szczególności $0 \notin A$. Ale 0 jest punktem skupienia A, więc A **nie jest domknięty**.

Zbiór A **nie jest zwarty**, bo nie jest domknięty (a poza tym ewidentnie nie jest ograniczony).

Wreszcie A **nie jest spójny**, gdyż $A = A_+ \cup A_-$, gdzie $A_\pm = \bigl\{x \in A \bigm| \pm x_1 > 0\bigr\}$ dostarcza rozkładu na dwa podzbiory takie, że $A_+ \cap \overline{A_-} = \emptyset = A_- \cap \overline{A_+}$. Istotnie: każda granica g ciągu punktów A_+ spełnia $g_1 \geq 0$, więc g nie należy do A_- i podobnie każda granica g' ciągu punktów A_- spełnia $g'_1 \leq 0$, a więc g' nie należy do A_+. $\square$

Zadanie 4. Obliczamy $R = \big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+3n}\,\big)^{-1}$. Mamy

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n^2+3n} \leq \sqrt[n]{2n^2}$$

dla dostatecznie dużych n. Stąd $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+3n} = 1$ i $R = 1$.

Możemy więc podstawiać w szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+3n)x^n$ wartości x takie, że $|x| < 1$ i funkcja $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+3n)x^n$ będzie gładka na tym zbiorze.

Korzystając z twierdzenia o pochodnej granicy ciągu funkcyjnego łatwo sprawdzamy, że dla $|x| < 1$ mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x\big(\tfrac{1}{1-x}\big)' = \tfrac{x}{(1-x)^2}$$

oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = x\left(\tfrac{x}{(1-x)^2}\right)' = \tfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

Stąd dla $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+3n)x^n = \tfrac{x+x^2}{(1-x)^3} + \tfrac{3x}{(1-x)^2}.$$

Podstawiając $x = \frac{1}{7}$ otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n}{7^n} = \tfrac{91}{108}.$$

□

*Zadanie **5***. Funkcja $x \mapsto \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$ jest różnowartościowa i gładka na otoczeniu $[0,1]$ (jej pochodną jest funkcja $x \mapsto \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} \frac{2}{(2-x)^2} > 0$). Dlatego możemy dokonać podstawienia $u = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$. Granice 0, 1 przetransformują się na 1, $\sqrt{3}$, a funkcją podcałkową po podstawieniu jest u. Z relacji $u^2 = \frac{2+x}{2-x}$ wynika, że $x = \frac{2u^2-2}{u^2+1}$, a więc

$$(2-x)^2 = \frac{16}{(u^2+1)^2}.$$

Tak więc skoro $du = u' dx$, otrzymujemy

$$dx = 8\frac{u\,du}{(u^2+1)^2}.$$

Podsumowując

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx = 8\int_1^{\sqrt{3}} \frac{u^2\,du}{(u^2+1)^2} &= 8\left(\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{u^2+1} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{(u^2+1)^2}\right) \\
&= 8\big[\operatorname{arctg}(u) - \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{u}{u^2+1} - \operatorname{arctg}(u)\big)\big]\Big|_1^{\sqrt{3}} \\
&= 4\big[\operatorname{arctg}(u) - \tfrac{u}{u^2+1}\big]\Big|_1^{\sqrt{3}} \\
&= 2 - \sqrt{3} + \tfrac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

$\square$