KONSULTACJE 19.01, 21.01

MATERIAŁY Z KONSULTACJI Z 19 STYCZNIA

EGZAMIN PRZYKŁADOWY 1999

ZADANIE 1 Niech $A_p = \{t \in \mathbb{R} : 2t^2 - 3t \leq pe^t\}$. Określić, w zależności od $p \in \mathbb{R}$ czy A_p jest otwarty, domknięty, zwarty, spójny.

ZADANIE 2 Narysować wykres funkcji $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} - \operatorname{arctg} x$

ZADANIE 3 Zbadać zbieżność ciągu zadanego rekurencją

$$x_{n+1} = \frac{5x_n - 6}{2x_n - 3} \qquad x_0 = 2$$

ZADANIE 4 Obliczyć granicę

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$$

ZADANIE 5 Zbadać zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1) - \sin(2n-1)}{\log 2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n(n-1)]!}{2^{n!}}$$

ZADANIE 6 Obliczyć całki

$$\int \cos(\log x)\,dx \qquad \int \frac{dx}{1 - \sin^4 x} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{3 + 5\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

ZADANIE 6: $\int \cos(\log x)\,dx = \int \cos t\, e^t dt = \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right)e^t + C =$

$t = \log x \quad x = e^t$

$dt = \frac{1}{x} \log x \quad e^t dt = \log x$

$\left\{(A\cos t + B\sin t)e^t\right\}' =$

$= \left\{-A\sin t + B\cos t + A\cos t + B\sin t\right\}e^t$

$= \left\{\underbrace{(B-A)}_{=0}\sin t + \underbrace{(A+B)}_{=1}\cos t\right\}e^t =$

$= \cos t\, e^t$

$A = B = \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}x(\cos\log x + \sin\log x) + C$

$$\int \frac{dx}{1-\sin^4 x} = \int \frac{(1/1+t^2)\,dt}{1-\left[\frac{t^2}{1+t^2}\right]^2} = \int \frac{dt}{1+t^2-\frac{t^4}{1+t^2}} = \int \frac{(1+t^2)dt}{(1+t^2)^2-t^4} = \int \frac{(1+t^2)\;dt}{(1+t^2-t^2)(1+t^2+t^2)} =$$

$t = tg x \quad dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1+t^2)dx$

$dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

$$= \int \frac{1+t^2}{1+2t^2} dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1/2}{1+2t^2}\right) dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}t)/\sqrt{2} \quad (+C$$

$$= \frac{1}{2} tg x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathrm{arctg}(\sqrt{2}x) + C$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+5\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{3+5\cos\varphi} = \int_{-1}^{1} \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{3+5\,\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} = 2\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)dt}{3+3t^2+5-5t^2} \quad \left(\times \frac{1}{1+t^2}\right.$$

$x = \sin\varphi$

$dx = \cos\varphi\, d\varphi$

$\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

$t = tg\, \varphi/2$

$d\varphi = \frac{2}{1+t^2} dt$

$\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$t \in [-1, 1]$

$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)(8-2t^2)} dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1-t^2}{(1+t^2)(4-t^2)} dt = \int_{-1}^{1} \left[\frac{2/5}{1+t^2} - \frac{3}{5}\,\frac{1}{4-t^2}\right] dt =$$

$$\frac{A}{1+t^2} + \frac{B}{4-t^2} = \frac{4A - At^2 + B + Bt^2}{\cdots} = \frac{(4A+B) + (B-A)t^2}{\cdots}$$

$4A+B = 1 \qquad 5A = 2$

$A - B = 1 \qquad A = 2/5$

$B = -3/5$

$$= \frac{2}{5} \mathrm{arctg}\, t \Big|_{-1}^{1} - \frac{3}{5} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{(2-t)(2+t)} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{5} \int_{-1}^{1} \left(\frac{\frac{1}{4}}{(2-t)} + \frac{\frac{1}{4}}{(2+t)}\right) dt =$$

$$\frac{\pi}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{4}(-\log|2-t|) + \frac{1}{4}\log|2+t|\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{4}\{+\log 3 + \log 3\}\right) = \frac{\pi}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}\log 3 =$$

$$= \frac{\pi}{5} - \frac{3\log 3}{10}$$

ZADANIE 5: $\sum \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)^2 \qquad a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \quad f(x) = \left(2^x - 1\right)^2 = \left(e^{x\log 2} - 1\right)^2 =$

$$= \left(1 + x\log 2 + \frac{1}{2}x^2\log^2 2 + \cdots - 1\right) = \left(x\log 2 + \frac{1}{2}x^2\log^2 2 + \cdots\right)^2$$

t2n $\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \log^2 2$ Szereg zbieżny na mocy II kryt. porównawczego.

$$\sum \frac{\sin(2n+1)-\sin(2n-1)}{\log 2n} \qquad \sin(2n+1)-\sin(2n-1)=2\sin(1)\cos(2n)$$

$$a_n = 2\sin(1)\frac{\cos(2n)}{\log 2n}$$ zbieżność bezwzględna – szereg rozbieżny

$$\frac{\frac{|\cos 2n|}{\log 2n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\log 2n}|\cos 2n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$ na mocy I-go kryterium porównawczego.

zbieżność warunkowa $x_n = \frac{1}{\log 2n} \searrow 0$

$$Y_m = \sum_{k=1}^{m}\cos(2k) = \sum_1^n \mathrm{Re}(e^{2ik}) = \mathrm{Re}\left(\sum_1^n (e^{2i})^k\right) = \mathrm{Re}\left(e^{2i}\frac{1-e^{2in}}{1-e^{2i}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{2i}\frac{e^{in}(e^{-in}-e^{in})}{e^{i}(e^{-i}-e^{i})}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{i(n+1)}\frac{\cancel{2i}\sin m}{\cancel{2i}\sin 1}\right) = \cos(n+1)\cos(n)\cdot\frac{1}{\sin 1}$$ Y_m jest ograniczony

szereg warunkowo zbieżny na mocy kryterium Dirichleta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[n(n-1)]!}{2^{n!}}$$ próbujemy d'Alemberta

$$\frac{[(n+1)n]!\,2^{n!}}{2^{(n+1)!}\,[m(m-1)]!} = \frac{(m^2+m)!\,2^{n!}}{(2^{n!})^{n+1}(m^2-n)!} = \frac{(n^2-n+1)(n^2-n+2)\cdots(m^2+m)}{2^{m\cdot m!}} \leqslant \frac{(m^2+m)^{2n}}{2^{m\cdot m!}} = \exp\Big(2n\log(n^2+n) +$$

$$- m\cdot m!\log 2\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$2m\log(m^2+m) - mm!\log 2 = m\left(2\log(m^2+m) - m!\log 2\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} -\infty$$

szereg zbieżny na podstawie kryt. d'Alemberta.

ZADANIE 4:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\log(1+x)\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right]\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = -\frac{e}{2}$$

$$= \exp\left(1-\frac{x}{2}+\Theta(x^2)\right) = e\cdot\exp\left(-\frac{x}{2}+\Theta(x^2)\right) =$$

$$= e\left(1-\frac{x}{2}+\Theta(x^2)\right) = e-\frac{e}{2}x+\Theta(x^2)$$

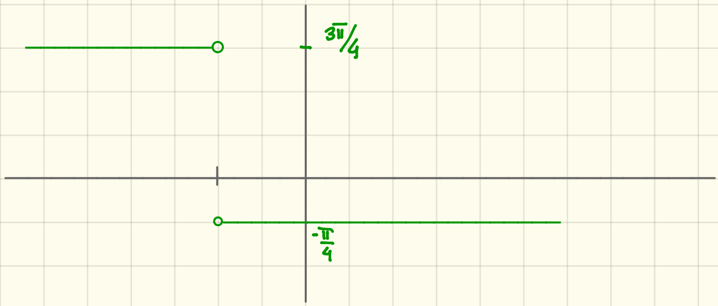
ZADANIE 2:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} - \operatorname{arctg} x \qquad f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$\frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{2+2x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

f jest stała na spójnych składowych dziedziny, tzn na $]-\infty,-1[$ i $]-1,\infty[$

$f(0) = -\frac{\pi}{4}$ $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$



ZADANIE 1

$$2t^2 - 3t \leq pe^t \qquad e^{-t}(2t^2-3t) \leq p \qquad \underset{\text{ciągła}}{f}(t) = e^{-t}(2t^2-3t) = te^{-t}(2t-3)$$

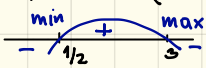
$\uparrow \frac{3}{2}$

$A_p = f^{-1}(\underbrace{]-\infty,p]}_{\text{domknięty}})$

A_p domknięty jako przeciwobraz zbioru domkniętego w odwzorowaniu ciągłym.

$f(3/2) = 0$

$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0 \quad \lim_{t\to-\infty} f(t) = +\infty \quad f(0) = 0 \quad f'(t) = e^{-t}(-2t^2+3t+4t-3) = e^{-t}(-2t^2+7t-3)$

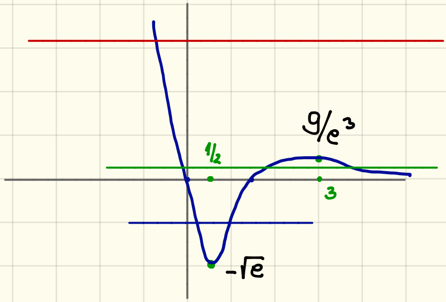


$$-2t^2+7t-3 = -2(t-3)\left(t-\tfrac{1}{2}\right)$$

$\Delta = 49 - 4\cdot2\cdot3 = 49-24 = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5 \quad t_1 = \frac{-7+5}{-4} = +\frac{1}{2} \quad t_2 = \frac{-7-5}{-4} = +3$

$f(+\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2}\left(2\cdot\tfrac{1}{4} - 3\cdot\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{e}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\right) = -\sqrt{e}$

$f(3) = e^{-3}(2\cdot9 - 3\cdot3) = e^{-3}9 = 9/e^3$



$p \geqslant 9/e^3$ $\quad A_p = [a, +\infty[$ $\quad$ domknięty, nieotwarty, niezwarty, spójny

$p \in \,]0, 9/e^3[$ $\quad A_p = [a,b] \cup [c, \infty[$ $\quad$ domknięty, nieotwarty, niezwarty, niespójny

$p = 0$ $\quad A_p = [0, 2/3]$ $\quad$ domknięty, nieotwarty, zwarty, spójny

$p \in \,]-\sqrt{e}, 0[$ $\quad A_p = [\alpha, \beta]$ $\quad$ j.w.

$p = -\sqrt{e}$ $\quad A_p = \{1/2\}$ $\quad$ j.w.

$p < \sqrt{e}$ $\quad A_p = \emptyset$ $\quad$ domknięty, otwarty

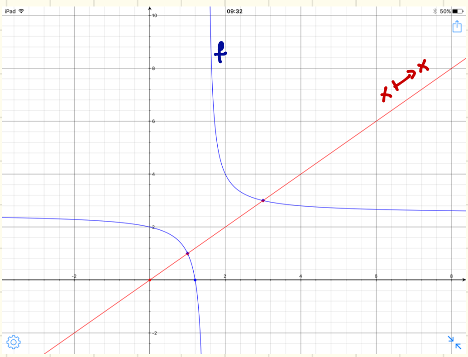
ZADANIE 1

$$f(x) = \frac{5x-6}{2x-3} = \frac{5}{2} + \frac{3/2}{2x-3}$$

$$x_{n+1} = \frac{5x_n - 6}{2x_n - 3} \qquad x_0 = 2$$

$f(x) = x$ dla $x = 1$ i $x = 3$

granica, jeśli istnieje, jest 1 lub 3



$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 5/2 \qquad x \neq 3/2$

$f(]3/2, \infty[) \subset \,]5/2, \infty[$

ponadto $f(]3/2, 3]) \subset [3, \infty[$

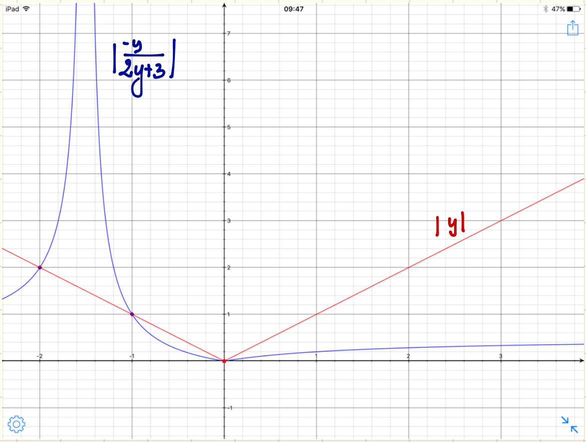
$f([3, \infty[) \subset \,]5/2, 3]$ tzn ciąg z $x_0 = 2$ będzie oscylujący wokół 3.

$$|f(x)-3| = \left|\frac{5x-6}{2x-3}-3\right| = \left|\frac{5x-6-6x+9}{2x-3}\right| = \left|\frac{-x+3}{2x-3}\right| = \left|\frac{(3-x)}{2(x-3)+3}\right|$$

$y = x-3$ $\qquad \left|\frac{-y}{2y+3}\right|$

$$\uparrow$$

$$\frac{-y}{2y+3} = -\frac{1}{2} + \frac{3/2}{2y+3}$$



dla $y>-1$ $\left|\frac{-y}{2y+3}\right| < |y|$

czyli

dla $x>-1$

$$|f(x)-3| < |x-3|$$

tzn dla $n>0$

$$|x_{n+1}-3| < |x_n-3|$$

Warto może zbadać ciąg $y_n = x_n-3$

$y_{n+1} = x_{n+1}-3 = f(x_n)-3 = -\frac{y_n}{2y_n+3}$ $\quad (y_n)$ jest oscylujący wokół zera $|y_n|$ jest malejący i ograniczony a więc zbieżny. Żeby wykazać, że jest zbieżny do 0 należy jednak chyba zbadać podciągi parzyste i nieparzyste, a tego już mi się nie chce!

MATERIAŁY Z KONSULTACJI Z 21 STYCZNIA

ZADANIE 1 Niech (x_n) będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej (X,d). Wykazać, że jeśli ciąg $\delta_n = d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\dots+d(x_n,x_{n+1})$ jest zbieżny to ciąg (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego.

ZADANIE 2 Niech X będzie przestrzenią ograniczonych ciągów liczbowych z metryką $d((x_n),(y_n)) = \sup_{\mathbb{N}} |x_n-y_n|$. Zbadać czy zbiór Z ciągów zbieżnych do 0 jest otwarty, domknięty, zwarty, spójny.

ODPOWIEDŹ: Domknięty, nieotwarty, niezwarty, spójny.

ZADANIE 3 Znaleźć najmniejszą relację równoważności $\mathcal{R}$ w $\mathbb{R}$ zawierającą zbiór $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\leq 1\}$. Podać $[1]_{\mathcal{R}}$, $[5]_{\mathcal{R}}$.

ZADANIE 4 Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregów:

$$\sum \frac{(1-n^2)^n}{(2n)!\,2^n} \qquad \sum \left(\frac{2}{1+\sqrt[n]{5}}\right)^n \qquad \sum (-1)^n\left[\frac{n+1}{\sqrt{n^2+100}}-1\right]$$