Badanie zbieżności szeregu

We wszystkich rozwiązaniach a_n będzie oznaczać wyraz ogólny badanego szeregu. Umieszczenie przysłówka „bezwzględnie" w nawiasie oznacza, że wszystkie lub prawie wszystkie wyrazy szeregu mają ten sam znak i zbieżność bezwzględna jest równoważna zbieżności. Symbol DDD oznacza „dla dostatecznie dużych".

Niejednokrotnie skorzystamy z następującycyh faktów:

Fakt 1. *Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych takimi, że*

- *dla każdego n mamy $x_n \neq 0$,*
- *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do 0,*
- *$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do pewnej granicy $a \in \mathbb{R}$.*

Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x_n)^{\frac{y_n}{x_n}} = \mathrm{e}^a$.

Fakt 2. *Dla dowolnej liczby $x > 0$ mamy*

$$\log x \leq n\big(\sqrt[n]{x} - 1\big) \leq \frac{\log x}{1 - \frac{\log x}{n}}.$$

Oba fakty były zapewne omawiane na ćwiczeniach.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[\sqrt{n}]}$

Rozwiązanie. Ponieważ $\forall n$ mamy $\sqrt{n} - 1 \leq [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$, mamy też

$$\frac{1}{\sqrt{n} - 1} \geq \frac{1}{[\sqrt{n}]} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

i

$$\frac{1}{n(\sqrt{n} - 1)} \geq \frac{1}{n[\sqrt{n}]} \geq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

W szczególności

$$0 \leq \frac{1}{n[\sqrt{n}]} \leq \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}},$$

więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[\sqrt{n}]}$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**). □

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n(-1)^n}$

Rozwiązanie. Policzmy

$$a_{2k-1} + a_{2k} = \frac{1}{1 - 2k} + \frac{1}{2k} = \frac{-1}{4k^2 - 2k}.$$

Tak więc

$$\sum_{n=1}^{2k} a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2k-1} + a_{2k}) = -\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{4l^2 - 2l}.$$

Stąd ciąg $\left(\sum\limits_{n=1}^{2k} a_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do pewnej granicy $g \in \mathbb{R}$.

Teraz

$$\sum_{n=1}^{2k+1} a_n = \left(\sum_{n=1}^{2k} a_n\right) + a_{2k+1} = \left(\sum_{n=1}^{2k} a_n\right) + \frac{1}{2k + 2},$$

a skoro $\frac{1}{2k+2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, ciąg $\left(\sum\limits_{n=1}^{2k+1} a_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ także jest zbieżny do g. Dlatego szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n(-1)^n}$ jest **zbieżny**. Jest to zbieżność **warunkowa**, bo

$$|a_n| = \frac{1}{|1 - n(-1)^n|} \geq \frac{1}{n + 1}.$$

□

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n}$

Rozwiązanie. Korzystamy z kryterium d'Alamberta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+1)!}{(n+1)!(2n+2)!} \frac{1}{7^{n+1}} \cdot 7^n \frac{n!(2n)!}{(3n)!} = \frac{1}{7} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{27}{28} < 1,$$

a więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n}$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**). □

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}}\right)$

Rozwiązanie. Rozważmy funkcję $f(x) = 1 - (1-x)^x = 1 - \exp\bigl(x \log(1-x)\bigr)$. Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^2} &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\exp\bigl(x\log(1-x)\bigr)\bigl(\log(1-x) - \frac{x}{1-x}\bigr)}{2x} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x) - \frac{x}{1-x}}{x} \\ &\overset{\mathrm{H}}{=} -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Ponieważ $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, powyższy rachunek pokazuje, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

a zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}}\right)$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**). □

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{1+n^2}\right)^p$

Rozwiązanie. Mamy

$$a_n \le \left(\frac{2n}{1+n^2}\right)^p \le 2^p \frac{1}{n^p}$$

oraz

$$\left(\frac{2+n}{1+n^2}\right)^p a_n \ge \left(\frac{n}{1+n^2}\right)^p \ge \left(\frac{n}{2n^2}\right)^p = 2^{-p} \frac{1}{n^p}.$$

Stąd szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{1+n^2}\right)^p$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**) wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$. □

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$

Rozwiązanie. Mamy

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}.$$

Zatem

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

i szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$ jest **rozbieżny**. □

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+1}{n(n+1)^n}$

Rozwiązanie. Obliczamy

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = na_n = \frac{n^n+1}{(n+1)^n} = \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^n + \frac{1}{(n+1)^n}.$$

Ponieważ $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}$ i $\frac{1}{(n+1)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, istnieje stała $c > 0$ taka, że

$$a_n \geq c\frac{1}{n} \qquad \text{DDD}n.$$

Stąd szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+1}{n(n+1)^n}$ jest **rozbieżny**. □

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-2n}{3+2n}\right)^n$

Rozwiązanie. Mamy

$$a_n = (-1)^n\Big(\frac{2n-3}{2n+3}\Big)^n = (-1)^n\Big(\frac{2n+3-6}{2n+3}\Big)^n = (-1)^n\Big(1 + \frac{-6}{2n+3}\Big)^n$$

W szczególności

$$|a_n| = \Big(1 + \frac{-6}{2n+3}\Big)^n = \Big(1 + \frac{-6}{2n+3}\Big)^{\frac{2n+3}{-6}\frac{-6n}{2n+3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-3} \neq 0$$

na mocy faktu 1. Stąd szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-2n}{3+2n}\right)^n$ jest **rozbieżny**. □

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

Rozwiązanie. Mamy

$$a_n = \big(1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\big)^n = \Big(\big(1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\big)^{\sqrt{n}}\Big)^{\sqrt{n}}.$$

Na mocy faktu 1 mamy $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}$, a więc

$$\big(1 - \tfrac{1}{\sqrt{n}}\big)^{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{DDD}n.$$

Zatem

$$a_n \leq \big(\tfrac{1}{2}\big)^{\sqrt{n}} \qquad \text{DDD}n.$$

Dla dowolnego $q \in]0,1[$ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^{\sqrt{n}}$ jest zbieżny np. na mocy kryterium całkowego:

$$\int q^{\sqrt{x}}dx = 2q^{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}\log q - 1}{\log^2 q}$$

(i funkcja $x \mapsto q^{\sqrt{x}}$ jest malejąca). Stąd szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**). □

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(\sqrt[n]{3}-2\big)^n$

Rozwiązanie. Mamy
$$a_n=(-1)^n\big(2-\sqrt[n]{3}\big)^n=(-1)^n\big(1+1-\sqrt[n]{3}\big)^n$$
a więc
$$|a_n|=\Big(1+\big(1-\sqrt[n]{3}\big)\Big)^n=\Big(1+\big(1-\sqrt[n]{3}\big)\Big)^{\frac{n(1-\sqrt[n]{3})}{1-\sqrt[n]{3}}}.$$
Fakt 2 pokazuje, że $y_n=n\big(1-\sqrt[n]{3}\big)=-n\big(\sqrt[n]{3}-1\big)\xrightarrow[n\to\infty]{}-\log 3$, a więc na mocy faktu 1,
$$|a_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathrm{e}^{-\log 3}=\frac{1}{3}\neq 0.$$
Dlatego szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(\sqrt[n]{3}-2\big)^n$ jest **rozbieżny**. □

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(10-p\sqrt[n]{5}\big)^n$

Rozwiązanie.

- Dla $p\in]9,11[$ mamy $10-p\sqrt[n]{5}\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda\in]-1,1[$, a więc dla takich p istnieje $\varepsilon>0$ taki, że
$$\big|10-p\sqrt[n]{5}\big|<1-\varepsilon\qquad \text{DDD}n.$$
W takim razie $|a_n|<(1-\varepsilon)^n$, a zatem dla $p\in]9,11[$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(10-p\sqrt[n]{5}\big)^n$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**)
- Jeśli $|p-9|>1$, to DDDn mamy $\big|10-p\sqrt[n]{5}\big|>1+\varepsilon$ dla pewnego $\varepsilon>0$, a więc dla $p\in\mathbb{R}\setminus[9,11]$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(10-p\sqrt[n]{5}\big)^n$ jest **rozbieżny**.
- Dla $p=9$ mamy
$$\big(10-p\sqrt[n]{5}\big)^n=\Big(1+9\big(1-\sqrt[n]{5}\big)\Big)^n=\Big(1+9\big(1-\sqrt[n]{5}\big)\Big)^{\frac{9n(1-\sqrt[n]{5})}{9(1-\sqrt[n]{5})}}.$$
Teraz $9n\left(1-\sqrt[n]{5}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}-9\log 5$ (fakt 2), a więc
$$a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{5^9}$$
(fakt 1). Stąd dla $p=9$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(10-p\sqrt[n]{5}\big)^n$ jest **rozbieżny**.
- Dla $p=9$ mamy
$$\big(10-p\sqrt[n]{5}\big)^n=(-1)^n\Big(1+11\big(\sqrt[n]{5}-1\big)\Big)^n.$$
Tak jak w poprzednim punkcie pokazujemy, że $|a_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}5^{11}\neq 0$, a więc dla $p=11$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(10-p\sqrt[n]{5}\big)^n$ jest **rozbieżny**.

□

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}$

Rozwiązanie. Mamy
$$\frac{1}{n+1}\le a_n\le\frac{1}{2n},$$
a więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}$ jest **rozbieżny**. □

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$

Rozwiązanie. $\square$

(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+n+1}\right)^p$

Rozwiązanie. Mamy

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+n+1} &= \frac{(n+1) - \sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt[4]{n^2+n+1}} \\ &= \frac{n^2+2n+1-(n^2+n+1)}{\left((n+1)+\sqrt{n^2+n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+n+1}\right)} \\ &= \frac{1}{\left((1+\frac{1}{n})+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+n+1}\right)}.\end{aligned}$$

Stąd

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}} = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+n+1}} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}\right)^p \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4^p}.$$

Tak więc dla $p > 2$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+n+1}\right)^p$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**), a dla $p \leq 2$ jest **rozbieżny**. $\square$

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \sin\frac{\pi}{2^n}$

Rozwiązanie. Ponieważ dla $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mamy $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$,

$$a_n = n!\sin\frac{\pi}{2^n} \geq \frac{2}{\pi}\frac{n!}{2^n} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0,$$

więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\sin\frac{\pi}{2^n}$ jest **rozbieżny**. $\square$

(16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt[3]{n^2+1}}}{2^n}$

Rozwiązanie. Stosujemy kryterium Cauchy'ego:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}3^{\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2},$$

bo $3^{\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n}} = \exp\left(\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n}\log 3\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Stąd szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt[3]{n^2+1}}}{2^n}$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**). $\square$

(17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n-\frac{1}{2n}\right)^n}{n^{n-\frac{1}{2n}}}$

Rozwiązanie. Mamy

$$a_n = \frac{n^n\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^n}{n^n\left(\sqrt{\sqrt[n]{n}}\right)^{-1}} = \sqrt{\sqrt[n]{n}} \cdot \left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^n$$

Wynika stąd, że $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0$, bo $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ i

$$\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{-2n^2\frac{-1}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^0 = 1$$

na mocy faktu 1. Dlatego szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n-\frac{1}{2n}\right)^n}{n^{n-\frac{1}{2n}}}$ jest **rozbieżny**. $\square$

(18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-\sqrt{n}}$

Rozwiązanie. Niech $f(x) = x^3 x^{-\sqrt{x}}$. Mamy $f'(x) = 3^{-\sqrt{x}}\big(3 - \sqrt{x}\log\sqrt{3}\big)$, a więc DDD$x$ mamy $f'(x) < 0$, i funkcja f jest malejąca. Możemy zatem zastosować kryterium całkowe. Funkcja pierwotna dla f jest postaci

$$F(x) = 3^{-\sqrt{x}} \cdot \big(\text{wielomian od } \sqrt{x}\big)$$

a zatem istnieje skończona granica $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ i szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-\sqrt{n}}$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**).

□

(19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2n+1)}{n^p}$

Rozwiązanie.

- Dla $p \leq 1$ mamy $a_n > \frac{1}{n}$, a zatem dla $p \leq 1$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2n+1)}{n^p}$ jest **rozbieżny**.
- Jeśli $p > 1$, to istnieje $p' \in]1, p[$. Tak więc
$$a_n = \frac{1}{n^{p'}} \frac{\log(2n+1)}{n^{p-p'}}.$$
Stąd DDDn mamy $a_n \leq \frac{1}{n^{p'}}$, bo $\frac{\log(2n+1)}{n^{p-p'}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. W szczególności dla $p > 1$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2n+1)}{n^p}$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**).

□

(20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{p+q\log n}$

Rozwiązanie.

- Gdy $q > 0$ mamy $p + q\log n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, a więc dla $q > 0$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{p+q\log n}$ jest **rozbieżny**.
- Dla $q = 0$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{p+q\log n}$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**) wtedy i tylko wtedy, gdy $p < -1$.
- Gdy $q < 0$ mamy $p+q\log n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, a więc dla $q > 0$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{p+q\log n}$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**).

□

(21) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \big(\log(\log n)\big)^{-\log n}$

Rozwiązanie. Mamy $a_n > 0$ dla wszystkich n i ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący. Możemy więc zastosować kryterium zagęszczeniowe:

$$2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{\big(\log(n\log 2)\big)^{n\log 2}} = \left(\frac{2}{\big(\log(n\log 2)\big)^{\log 2}}\right)^n$$

Ponieważ $\frac{2}{(\log(n\log 2))^{\log 2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, mamy DDD$n$

$$2^n a_{2^n} < \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

i szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny. Stąd szereg $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \big(\log(\log n)\big)^{-\log n}$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**).

□

(22) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\log(\log n)}$

Rozwiązanie. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nieujemny i malejący. Niech $c_n = 2^n a_{2^n}$. Zbieżność szeregu $\sum a_n$ jest równoważna zbieżności $\sum c_n$. Aby zbadać tę ostatnią stosujemy kryterium Cauchy'ego. Mamy

$$c_n = 2^n \frac{1}{(n\log 2)^{\log(n\log 2)}},$$

a więc

$$\sqrt[n]{c_n} = \frac{2}{(n\log 2)^{\frac{\log(n\log 2)}{n}}} = 2\exp\left(-\frac{\big(\log(n\log 2)\big)^n}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 > 1.$$

Tak więc szereg $\sum c_n$ jest rozbieżny, a więc także szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\log(\log n)}$ jest **rozbieżny**. □

(23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\log\big(1+\frac{1}{n}\big)$

Rozwiązanie. Niech $f(x) = x\log(1+x)$. Wtedy $a_n = f\big(\frac{1}{n}\big)$. Mamy

$$x\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\tfrac{x^n}{n+1} = x^2 - \big(\tfrac{x^3}{2} - \tfrac{x^4}{3} + \tfrac{x^5}{4} - \cdots\big).$$

Dla małych $x > 0$ szereg w nawiasie jest naprzemienny, a wartości bezwzględne jego wyrazów maleją. Dlatego

$$0 < \big(\tfrac{x^3}{2} - \tfrac{x^4}{3} + \tfrac{x^5}{4} - \cdots\big) < \tfrac{x^3}{2} < x^2$$

(przynajmniej dla małych x). W szczególności dla małych $x > 0$ mamy $x\log(1+x) < x^2$, a stąd $a_n < \frac{1}{n^2}$. Dlatego szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\log\big(1+\frac{1}{n}\big)$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**). □

(24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\log\big(1+\frac{1}{n}\big)$

Rozwiązanie. Ciąg $\big(|a_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący, a więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\log\big(1+\frac{1}{n}\big)$ jest **zbieżny** na mocy kryterium Leibniza. Jest on zbieżny **warunkowo**, gdyż

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\big(1+\frac{1}{n}\big)}{\frac{1}{n}} = 1$$

a więc $\sum |a_n| = +\infty$. □

(25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n(n+1)}{n^2+1}\right)$

Rozwiązanie. Mamy

$$a_n = \log\left(\frac{n(n+1)}{n^2+1}\right) = \log\left(\frac{n^2+1+n-1)}{n^2+1}\right) = \log\left(1+\frac{n-1)}{n^2+1}\right) > \log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

bo $\frac{n-1)}{n^2+1} > \frac{1}{n}$. W zadaniu (24) pokazaliśmy, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(1+\frac{1}{n}\big) = +\infty$, więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n(n+1)}{n^2+1}\right)$ jest **rozbieżny**. □

(26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log\bigl(\cos \frac{1}{n}\bigr)$

Rozwiązanie. Wszystkie wyrazy naszego szeregu są ujemne. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log\bigl(\cos\frac{1}{n}\bigr)}{\frac{1}{n^2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\bigl(\cos x\bigr)}{x^2} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{2x\cos x} = \frac{1}{2}.$$

Stąd szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log\bigl(\cos \frac{1}{n}\bigr)$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**). □

(27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\bigl(\pi \sqrt[n]{n^3+n}\,\bigr)$

Rozwiązanie. Niech $b_n = 1 - \sqrt[n]{n^3+n}$. Z faktu 2 (dla $x = n^3+n$) mamy

$$\log(n^3+n) \le n\bigl(\sqrt[n]{n^3+n} - 1\bigr),$$

czyli

$$\log(n^3+n) \le \frac{-b_n}{\frac{1}{n}} = \frac{|b_n|}{\frac{1}{n}}.$$

W szczególności szereg $\sum b_n$ jest rozbieżny.

Teraz, skoro

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{\pi(1-x)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\cos \pi x}{-1} = 1,$$

mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \pi$, a więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\bigl(\pi \sqrt[n]{n^3+n}\,\bigr)$ jest **rozbieżny**. □

(28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\bigl(\pi\sqrt{n^2+1}\,\bigr)$

Rozwiązanie. Mamy

$$\begin{aligned} a_n &= \sin\Bigl(\pi\,\Bigl(n + \bigl(\sqrt{n^2+1} - n\bigr)\Bigr)\Bigr) \\ &= \cos(\pi n)\sin\Bigl(\pi\bigl(\sqrt{n^2+1} - n\bigr)\Bigr) + \sin(\pi n)\cos\Bigl(\pi\bigl(\sqrt{n^2+1} - n\bigr)\Bigr) \\ &= \cos(\pi n)\sin\Bigl(\pi\bigl(\sqrt{n^2+1} - n\bigr)\Bigr) + 0 \\ &= (-1)^n \sin\Bigl(\pi\bigl(\sqrt{n^2+1} - n\bigr)\Bigr) \end{aligned}$$

Ciąg $\bigl(|a_n|\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący (dla $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ mamy $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$), więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\bigl(\pi\sqrt{n^2+1}\,\bigr)$ jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza. Jednak

$$|a_n| = \sin\Bigl(\pi\bigl(\sqrt{n^2+1} - n\bigr)\Bigr) = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{3n}\right),$$

a ponadto

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3n}}{\frac{\pi}{3n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

więc szereg $\sum |a_n| = +\infty$, czyli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\bigl(\pi\sqrt{n^2+1}\,\bigr)$ jest **zbieżny warunkowo**. □

(29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right)$

Rozwiązanie. Ponieważ $\frac{n^2\pi}{n+1} = \frac{n(n+1)\pi - n\pi}{n+1} = n\pi + \frac{n}{n+1}\pi = (n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1}$

$$a_n = \sin\big((n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1}\big) = \cos\big((n+1)\pi\big)\sin\big(\tfrac{\pi}{n+1}\big) = (-1)^{n+1}\sin\big(\tfrac{\pi}{n+1}\big).$$

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right)$ jest **zbieżny warunkowo** (kryterium Leibniza i fakt, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$). □

(30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n-\cos n}$

Rozwiązanie. Zapiszmy $a_n = x_n y_n$, kładąc $x_n = \sin n$, a $y_n = \frac{1}{2n-\cos n}$. Ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotonicznie zbieżny do 0, bo

$$\frac{1}{y_{n+1}} - \frac{1}{y_n} = 2n + 2 - \cos n + 1 - 2n + \cos n \geq 0.$$

Natomiast ciąg $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ ma ograniczone sumy częściowe: dla każdego $N \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} x_n\right| = \left|\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}\right| \leq \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}|}.$$

Na mocy kryterium Dirichleta szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Zauważmy dalej, że

$$|a_n| \geq \frac{|\sin n|}{2n-1} > \frac{\sin^2 n}{2n-1} = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2n)}{2n-1}$$

Tak więc

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos 2n}{2n-1}$$

Ponieważ sumy $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{\cos 2n}{2n-1}$ mają skończoną granicę gdy $N \to \infty$ (ponownie kryterium Dirichleta), widzimy, że $\sum |a_n| = +\infty$. Tak więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2n-\cos n}$ jest **zbieżny warunkowo**. □

(31) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n+1}$

Rozwiązanie.

- Jest jasne, że dla $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$ mamy $a_n = 0$ więc dla $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n+1}$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**).
- Dla $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$ rozumujemy tak jak w zadaniu (30):

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos 2\alpha n}{n+1}.$$

Na mocy kryterium Dirichleta druga suma po prawej stronie ma skończoną granicę gdy $N \to \infty$ (dokładnie wtedy, gdy $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$), a więc dla $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n+1}$ jest **rozbieżny**.

□

(32) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+5\sin n}\right)\sin n\alpha$

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+5\sin n}=\frac{5\sin n}{n(n+5\sin n)}<\frac{5}{n(n-5)},$$

a więc $|a_n|<\frac{5}{n(n-5)}$ i szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+5\sin n}\right)\sin n\alpha$ jest **zbieżny bezwzględnie**. □

(33) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n+5\sin n}$

Rozwiązanie.

- Dla $\alpha\in\pi\mathbb{Z}$ wszystkie a_n są równe zero, a więc dla $\alpha\in\pi\mathbb{Z}$ szereg jest **zbieżny** (**bezwzględnie**).
- Przyjmijmy, że $\alpha\notin\pi\mathbb{Z}$. Z zadania (32) wiemy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n}-a_n\right)$ jest zbieżny. Dlatego obie sumy po prawej stronie wyrażenia

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=-\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\sin n\alpha}{n}-a_n\right)+\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin n\alpha}{n}.$$

mają granicę przy $N\to\infty$ (dla $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{\sin n\alpha}{n}$ stosujemy kryterium Dirichleta), a stąd szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

W zadaniu (32) wykazaliśmy też, że szereg $\sum\left(\frac{\sin n\alpha}{n}-a_n\right)$ jest zbieżny bezwzględnie, a więc gdyby szereg $\sum a_n$ był zbieżny bezwzględnie, to szereg $\sum\frac{|\sin n\alpha|}{n}$ też byłby zbieżny bezwzględnie. Ale łatwo wykazać, że jest on rozbieżny (zadanie (31)). Zatem dla $\alpha\notin\pi\mathbb{Z}$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n+5\sin n}$ jest **zbieżny warunkowo**.

□

(34) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{2}-\sqrt{n}\right)$

Rozwiązanie. Obliczamy

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)^2-4n}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}}\\&=\frac{\sqrt{n^2-1}-n}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}}\\&=\frac{-1}{\left(\sqrt{n^2-1}+n\right)\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}\right)}\end{aligned}$$

Stąd mamy $a_n<0$ dla wszystkich n oraz $\frac{|a_n|}{\frac{1}{n^{3/2}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\text{const}>0$. Wynika stąd natychmiast, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{2}-\sqrt{n}\right)$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**). □

(35) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

Rozwiązanie. Stosujemy kryterium Cauchy'ego:

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)}=\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}\cdot\frac{-2(n+1)}{n+1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathrm{e}^{-2}<1$$

na mocy faktu 1. Stąd szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**). □

(36) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt[n]{p}}\right)^{n}$

Rozwiązanie. Mamy

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt[n]{p}+1-\sqrt[n]{p}}{1+\sqrt[n]{p}}\right)^n = \left(1+\frac{1-\sqrt[n]{p}}{1+\sqrt[n]{p}}\right)^n = \left(1+\frac{1-\sqrt[n]{p}}{1+\sqrt[n]{p}}\right)^{\frac{1+\sqrt[n]{p}}{1-\sqrt[n]{p}}\frac{n\left(1-\sqrt[n]{p}\right)}{1+\sqrt[n]{p}}}$$

Korzystając z faktu 2 nietrudno wykazać, że $n\left(1-\sqrt[n]{p}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}-\log p$, a zatem, na mocy faktu 1 mamy

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\log p} = \frac{1}{\sqrt{p}} \neq 0.$$

Dlatego szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt[n]{p}}\right)^{n}$ jest **rozbieżny**. □

(37) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{[\sqrt{n}]}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Rozwiązanie. Wszystkie wyrazy są nieujemne, więc zbieżność jest równoważna zbieżności bezwzględnej. W szczególności jeśli $\sum a_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest też szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, gdzie $b_k = \sum\limits_{n=k^2}^{k^2+2k} a_n$, formalnie:

$$\sum_{1}^{\infty} = \sum_{1}^{3}+\sum_{4}^{8}+\sum_{9}^{15}+\sum_{16}^{24}+\cdots.$$

Dla $n\in\{k^2,\ldots,2k\}$ mamy $k\leq\sqrt{n}<\sqrt{k^2+2k+1}=k+1$, a więc $\left[\sqrt{n}\right]=k$. Dlatego

$$\begin{aligned}
b_k &= \sum_{n=k^2}^{k^2+2k}\left(\frac{1}{[\sqrt{n}]}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=k^2}^{k^2+2k}\left(\frac{1}{[\sqrt{n}]}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2k+1}{k}-\sum_{n=k^2}^{k^2+2k}\frac{1}{\sqrt{n}}.\\
&= \frac{2k+1}{k}-\left(\frac{1}{\sqrt{k^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k^2+k}}+\frac{1}{\sqrt{k^2+k+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k^2+2k}}\right)\\
&\geq \frac{2k+1}{k}-\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{k^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k^2}}}_{k+1}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{k^2+k}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k^2+k}}}_{k}\right)\\
&= \frac{2k+1}{k}-\frac{k+1}{k}-\frac{k}{\sqrt{k^2+k}}\\
&= 1-\frac{k}{\sqrt{k^2+k}} = \frac{\sqrt{k^2+k}-k}{\sqrt{k^2+k}}\\
&= \frac{k}{\left(\sqrt{k^2+k}+k\right)\sqrt{k^2+k}}\\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{k^2+k}+k\right)\sqrt{1+\frac{1}{k}}} \geq \frac{1}{6k}.
\end{aligned}$$

Oznacza to, że szereg $\sum b_k$ jest rozbieżny, a co za tym idzie szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{[\sqrt{n}]}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ jest **rozbieżny**. □

(38) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n/\sqrt{5}]}$

Rozwiązanie. Funkcja $n \mapsto \left[\frac{n}{\sqrt{5}}\right]$ jest monotonicznie rosnąca, więc szereg $\sum a_n$ jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza. Ponadto

$$|a_n| = \frac{1}{[n/\sqrt{5}]} \geq \frac{\sqrt{5}}{n},$$

a więc szereg $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n/\sqrt{5}]}$ jest **zbieżny warunkowo**. □

(39) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{[n\sqrt{2}]}$

Rozwiązanie. Jest jasne, że $\sum |a_n| = +\infty$, bo

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{[n\sqrt{2}]} \geq \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Z drugiej strony, ponieważ $\left[(n+1)\sqrt{2}\right] = \left[n\sqrt{2}\right] + u$, gdzie $u \in \{1, 2\}$, mamy

$$\begin{aligned}
|a_n| - |a_{n+1}| &= \frac{\sqrt{n}}{[n\sqrt{2}]} - \frac{\sqrt{n+1}}{[(n+1)\sqrt{2}]} \geq \frac{\sqrt{n}}{[n\sqrt{2}]} - \frac{\sqrt{n+1}}{[n\sqrt{2}]+1} \\
&= \frac{\sqrt{n} + \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)[n\sqrt{2}]}{[n\sqrt{2}]\left([n\sqrt{2}]+1\right)} \\
&= \frac{\sqrt{n} - \frac{[n\sqrt{2}]}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}{[n\sqrt{2}]\left([n\sqrt{2}]+1\right)} > \frac{\sqrt{n} - \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}{[n\sqrt{2}]\left([n\sqrt{2}]+1\right)} \\
&= \frac{\sqrt{n}\left(1 - \frac{\sqrt{n}\sqrt{2}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)}{[n\sqrt{2}]\left([n\sqrt{2}]+1\right)}.
\end{aligned}$$

Ostatnie wyrażenie jest ściśle większe od zera DDDn, gdyż

$$\left(1 - \frac{\sqrt{n}\sqrt{2}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Oznacza to, że ciąg $\left(|a_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący, a zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{[n\sqrt{2}]}$ jest **zbieżny warunkowo** na mocy kryterium Leibniza. □

(40) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2 - \sqrt[n]{n}\right)^n$

Rozwiązanie. Kładąc $x = n$ w fakcie 2 otrzymujemy nierówność

$$\log n \leq n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) \leq \frac{\log n}{1 - \frac{\log n}{n}} = \log n\left(1 + \frac{\frac{\log n}{n}}{1 - \frac{\log n}{n}}\right).$$

Odejmując $\log n$ od obu stron uzyskujemy

$$0 \leq \left(n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) - \log n\right) \leq \frac{\frac{(\log n)^2}{n}}{1 - \frac{\log n}{n}} = \frac{(\log n)^2}{n - \log n},$$

co pokazuje, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) - \log n\right) = 0.$$

Pomnóżmy powyższą równość stronami przez

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Otrzymamy
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)-\tfrac{\log n}{\sqrt{n}}\right)=0,$$
a ponieważ $\frac{\log n}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, dostajemy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=0$ lub inaczej
$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2=0. \tag{$\star$}$$

Teraz niech $x_n=\sqrt[n]{n}\left(2-\sqrt[n]{n}\right)-1$. Wtedy
$$(1+x_n)^n=n\left(2-\sqrt[n]{n}\right)^n=na_n.$$
Dalej
$$x_n=-1+2\sqrt[n]{n}-\sqrt[n]{n^2}=-\left(1-2\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}^2\right)=-\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2.$$
Z równości ($\star$) otrzymujemy więc
$$nx_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Dzięki temu, korzystając z faktu 1, uzyskujemy
$$na_n=(1+x_n)^n=(1+x_n)^{\frac{nx_n}{x_n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathrm{e}^{\lim nx_n}=\mathrm{e}^0=1,$$
a to pokazuje, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2-\sqrt[n]{n}\right)^n$ jest **rozbieżny**. □

(41) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{\sqrt[n]{n!}}$

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru Stirlinga:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}=1.$$
Mamy
$$\frac{a_n}{1/n^{1-p}}=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{n}{n\mathrm{e}^{-1}\sqrt[2n]{2\pi n}}\sqrt[n]{\frac{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!}}=\frac{\mathrm{e}}{\sqrt[2n]{2\pi n}}\sqrt[n]{\frac{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathrm{e}.$$
Stąd szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{\sqrt[n]{n!}}$ jest **zbieżny** (**bezwzględnie**) wtedy i tylko wtedy, gdy $1-p>1$ tzn. gdy $p<0$. □

(42) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n}\right)$

Rozwiązanie. Mamy
$$a_{2k}=\frac{1}{2k}-\left(\frac{1}{2+k+1}-\frac{1}{2k+1}+\cdots+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k}\right).$$
Wyrażenie w nawiasie jest większe od zera, więc
$$a_{2k}>\frac{1}{2k}.$$
Podobnie
$$a_{2k+1}=\frac{1}{2k+1}-\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}+\cdots+\frac{1}{4k}-\frac{1}{4k+1}\right)-\frac{1}{4k+2}.$$
Ponownie wyrażenie w nawiasie jest większe od zera, co pokazuje, że
$$a_{2k+1}>\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}=\frac{1}{4k+2}.$$
Wynika stąd, że dla każdego n mamy $a_n>\frac{1}{2n}$, a zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n}\right)$ jest **rozbieżny**. □