POJĘCIE CIĄGŁOŚCI

DEFINICJA: Niech (X,d), (Y,ρ) będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f: X \to Y$ będzie odwzorowaniem. Mówimy, że f jest ciągłe w punkcie $x_0 \in X$ jeśli spełniony jest warunek:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x\in X \quad d(x,x_0)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

PRZYKŁAD: Wykażemy, że zdefiniowane przez nas funkcje $\mathbb{R} \ni x \mapsto e(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest ciągła w $x=0$.

Będą nam do tego potrzebne oszacowania funkcji $x \mapsto e(x)$ nieco dokładniejsze niż te, które już mamy, tzn

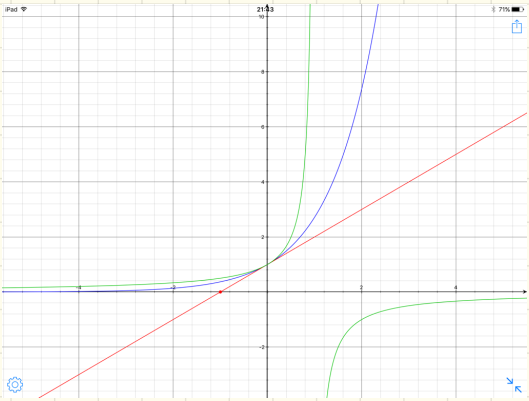
$* \ \forall x \ \ e(x) \geq x+1 \ , \quad \forall x \ \ e(x)>0$

$\downarrow$ zamienimy x na $-x$

$$e(-x) \geq 1-x \Rightarrow \frac{1}{e(x)} \geq 1-x \Rightarrow \text{dla } x<1 \quad e(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

ostatecznie: $\forall x<1 \quad e(x) \leq \frac{1}{1-x} \quad **$

Zobaczmy jak oszacowania $*$ i $**$ prezentuje się na wykresach



$x \mapsto e(x)$

$x \mapsto 1+x$

$x \mapsto \frac{1}{1-x}$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ i zapiszmy warunek ciągłości w $x_0 = 0$ dla funkcji $x \mapsto e(x)$ względem kanonicznej topologii w $\mathbb{R}$ związanej z wartością bezwzględną

2

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \quad \underbrace{|x - 0| < \delta}_{|x| < \delta} \Rightarrow \underbrace{|e(x) - e(0)| < \varepsilon}_{|e(x) - 1| < \varepsilon}$$

Oszacujmy $e(x) - 1$:

$$x + 1 \leq e(x) \leq \frac{1}{1-x} \qquad x \leq e(x) - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1 - 1 + x}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

$|e(x) - 1| \leq \max\left\{|x|, \left|\frac{x}{1-x}\right|\right\}$ dla $x < 1$. Interesujemy się jedynie x bliskimi 0, możemy więc przyjąć, że $|x| < 1$. Wtedy dla $x > 0$ $x < \frac{x}{1-x}$ tzn $\max\left\{|x|, \left|\frac{x}{1-x}\right|\right\} = \frac{x}{1-x}$. Dla $x < 0$ $|x| > \left|\frac{x}{1-x}\right|$ więc $\max\left\{|x|, \left|\frac{x}{1-x}\right|\right\} = |x|$. Mamy trochę niewygodną sytuację, bo po jednej i po drugiej stronie zera do szacowania używamy innych funkcji. Można to zmienić zauważając że niezależnie od znaku x mamy $|x| \leq \frac{|x|}{1 - |x|}$ (dla $|x| < 1$). Wtedy

$$|e(x) - 1| \leq \max\left\{|x|, \left|\frac{x}{1-x}\right|\right\} \leq \frac{|x|}{1 - |x|}$$

Rozważmy $t \xmapsto{f} \frac{t}{1-t}$ dla $0 \leq t < 1$. Funkcja to jest rosnąca, zatem biorąc $t < \delta$ mamy pewność, że otrzymamy $f(t) < f(\delta)$. Załóżmy więc, że $f(\delta) = \varepsilon$ i znajdźmy odpowiednią δ:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{1-\delta} \quad \varepsilon(1-\delta) = \delta \quad \varepsilon - \varepsilon\delta = \delta \quad \varepsilon = \delta + \varepsilon\delta \quad \varepsilon = (1+\varepsilon)\delta \quad \delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

Dla ustalonego ε należy wziąć $t < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ wtedy wiadomo, że $f(t) < \varepsilon$. Jeśli więc $|x| < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ to $\frac{|x|}{1-|x|} < \varepsilon$, a co za tym idzie także $|e(x) - 1| < \varepsilon$. ∎

UWAGA: Korzystając z własności funkcji $x \mapsto e(x)$ i ciągłości w $x_0 = 0$

możemy łatwo wykazać ciągłość w każdym innym punkcie. Istotnie, weźmy dowolne x_0: 3

$$e(x_0)-e(x)=e(x_0)-e((x-x_0)+x_0)=e(x_0)-e(x-x_0)e(x_0)=$$
$$e(x_0)[1-e(x-x_0)]$$

$$|e(x_0)-e(x)|=e(x_0)|e(x-x_0)-1|$$ ma być $<\varepsilon$,

tzn $|e(x-x_0)-1|$ ma być $<\varepsilon/e(x_0)$. Korzystając z poprzednich rachunków musimy wziąć $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon/e(x_0)}{1+\varepsilon/e(x_0)}=\dfrac{\varepsilon}{e(x_0)+\varepsilon}$.

Okazuje się, że to jaką δ musimy wziąć zależy od tego w jakim punkcie ciągłość badamy. Dla stwierdzenia ciągłości w x_0 nie ma to jednak znaczenia.

DEFINICJA: Mówimy że $f: X \to Y$ jest ciągła na zbiorze otwartym $\mathcal{U}\subset X$ jeśli f jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Możemy więc stwierdzić, że funkcja $x \longmapsto e(x)$ jest ciągła na całym $\mathbb{R}$.

INNE SPOSOBY CHARAKTERYZACJI CIĄGŁOŚCI Dla $f: X\to Y$ następujące warunki są równoważne

(1) f jest ciągła w x_0

(2) dla każdego otoczenia $\mathcal{U}$ punktu $f(x_0)$ istnieje otoczenie ϑ punktu x_0 takie, że $f(\vartheta)\subset\mathcal{U}$

(3) jeśli $\mathcal{U}$ jest otoczeniem $f(x_0)$ to $f^{-1}(\mathcal{U})$ jest otoczeniem x_0

(4) jeśli (x_n) jest zbieżny do x_0 to $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x_0)$

DOWÓD: (1) ⇒ (2) Weźmy otoczenie $\mathcal{U}$ punktu $f(x_0)$. Z definicji otoczenia wynika, że $f(x_0)$ jest punktem wewnętrznym $\mathcal{U}$. Można więc znaleźć kulę o promieniu ε i środku w $f(x_0)$ taką, że $K(f(x_0), \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Z ciągłości f w x_0 wiemy, że do ε możemy dobrać δ taką że jeśli $d(x_0, x) < \delta$ to $\rho(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. W języku kul oznacza to, że jeśli $x \in K(x_0, \delta)$ to 4
$f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon)$. Jeszcze inaczej możemy zapisać, że

$$f(K(x_0, \delta)) \subset K(f(x_0), \varepsilon) \subset \mathcal{U}$$

Szukanym otoczeniem $\mathcal{O}$ punktu x_0 jest więc $K(x_0, \delta)$.

(2) ⇒ (3) Weźmy otoczenie $\mathcal{U}$ punktu $f(x_0)$ i odpowiednie $\mathcal{O}$ takie, że $f(\mathcal{O}) \subset \mathcal{U}$ i $\mathcal{O}$ jest otoczeniem x_0. Skoro $f(\mathcal{O}) \subset \mathcal{U}$ to $\mathcal{O} \subset f^{-1}(\mathcal{U})$ zatem $f^{-1}(\mathcal{U})$ także jest otoczeniem x_0.

(3) ⇒ (4) Weźmy ciąg (x_n) zbieżny do x_0 oraz otoczenie $\mathcal{U}$ punktu $f(x_0)$. Z (3) wiemy, że $f^{-1}(\mathcal{U})$ jest otoczeniem x_0, zatem $f^{-1}(\mathcal{U})$ zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n). W takim wypadku $\mathcal{U}$ zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu $f(x_n)$. Otoczenie $\mathcal{U}$ punktu $f(x_0)$ może być wybrane dowolnie, co pokazuje, że $f(x_n) \to f(x_0)$

(4) ⇒ (1) n.a. Załóżmy że nie zachodzi warunek ciągłości, tzn

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x \; d(x, x_0) < \delta \text{ i } \rho(f(x), f(x_0)) > \varepsilon$$

Weźmy teraz $\delta = \frac{1}{n}$ i niech $x_n \in K(x_0, \delta)$. Oczywiście $x_n \to x_0$ ale $\rho(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon$ zatem $f(x_n) \not\to f(x_0)$ co jest sprzeczne z (4) ∎

$$\begin{array}{ccc} (1) & \Rightarrow & (2) \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ (4) & \Leftarrow & (3) \end{array}$$

UWAGA: W dwóch spośród czterech równoważnych opisów ciągłości użyto się jedynie pojęć topologicznych (otoczenia) a nie metrycznych (odległości). Pojęcie ciągłości związane jest zatem z rodziną zbiorów otwartych a nie z metryką od której pochodzi. W szczególności równoważne metryki prowadzą do tych samych zbiorów odwzorowań ciągłych. 5

Powiemy że odwzorowanie $f: X \to Y$ jest ciągłe jeśli jest ciągłe w każdym punkcie przestrzeni X. Odwzorowania ciągłe to morfizmy przestrzeni topologicznych

TWIERDZENIE: Odwzorowanie $f: X \to Y$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy przeciwobraz każdego zbioru otwartego w Y jest otwarty w X. Podobnie f jest ciągłe wtedy i tylko wtedy kiedy przeciwobraz każdego zbioru domkniętego w Y jest domknięty w X.

DOWÓD Udowodniliśmy wcześniej równoważność czterech sposobów opisywania ciągłości w punkcie - teraz możemy korzystać z któregokolwiek z nich. Zacznijmy od zbiorów otwartych:

$\Rightarrow$ Niech $f: X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Oznacza to, że jest ciągłe w każdym punkcie. Weźmy zbiór Θ otwarty w Y. Θ jest otoczeniem każdego swojego punktu. Jeśli $f^{-1}(\Theta) \neq \emptyset$ to z ciągłości $f^{-1}(\Theta)$ jest otoczeniem każdego swojego punktu, wobec tego $f^{-1}(\Theta)$ jest zbiorem otwartym. Jeśli $f^{-1}(\Theta) = \emptyset$ jest otwarty z definicji.

$\Leftarrow$ Załóżmy teraz, że $f^{-1}(\Theta)$ jest otwarty dla dowolnego $\Theta \subset Y$ otwartego. Weźmy $x_0 \in X$ i $\Theta \subset Y$ taki, że $f(x_0) \in \Theta$. Θ jest otwarty, więc jest otoczeniem $f(x_0)$. $f^{-1}(\Theta)$ zawiera x_0 i jako otwarty jest otoczeniem x_0 wobec tego f jest ciągłe w x_0. Wobec dowolności wyboru x_0, f jest ciągłe wszędzie.

Teraz o zbiorach domkniętych:

$\Rightarrow$ Niech f będzie odwzorowaniem ciągłym. Weźmy $D \subset Y$ zbiór domknięty. Załóżmy także, że $f^{-1}(D) \neq \emptyset$. Niech punkt x_0 będzie punktem skupienia $f^{-1}(D)$. Możemy wobec tego znaleźć ciąg elementów zbioru $f^{-1}(D)$ zbieżny do x_0. Niech (x_n) będzie takim ciągiem. Wartości $f(x_n)$ leżą w D. Z ciągłości f $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ a z domkniętości D $f(x_0) \in D$. Wobec tego $x_0 \in f^{-1}(D)$. Wykazaliśmy, że punkty skupienia $f^{-1}(D)$ należą do $f^{-1}(D)$, wobec tego $f^{-1}(D)$ jest domknięty.

6.

$\Leftarrow$ Weźmy dowolny zbiór $A \subset Y$. Rozważmy dwa zbiory:

$f^{-1}(Y \setminus A)$ i $X \setminus f^{-1}(A)$

$$f^{-1}(Y\setminus A) = \{x \in X : f(x) \in Y \setminus A\} = \{x \in X : f(x) \notin A\}$$

$$X \setminus f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \notin A\}$$

to samo!

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

Niech teraz Θ będzie otwarty, $\Theta \subset Y$. $Y \setminus \Theta$ jest domknięty, wobec tego $f^{-1}(Y \setminus \Theta)$ jest domknięty. Ale $f^{-1}(Y \setminus \Theta) = X \setminus f^{-1}(\Theta)$. Jego domkniętość oznacza, że $f^{-1}(\Theta)$ jest otwarty. Z dowolności Θ wynika ciągłość f. $\blacksquare$

Powyższa charakteryzacja odwzorowań ciągłych jest bardzo wygodna do udowodnienia następującego faktu:

FAKT: Niech $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ będą odwzorowaniami trzech przestrzeni metrycznych. Wówczas (1) jeśli f jest ciągłe w x_0 i g jest ciągłe w $f(x_0)$ to $g \circ f$ jest ciągłe w x_0; (2) jeśli f i g są ciągłe to $f \circ g$ jest ciągłe.

Uzasadnienie każdy powinien być w stanie zapisać sam!

PRZYKŁADY ODWZOROWAŃ CIĄGŁYCH I NIECIĄGŁYCH:

(1) (X,d) p. metryczna

$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem ciągłym

jaka metryka tu? d_1, d_∞, d_2 ?

Warunek ciągłości w punkcie $(x_0, y_0) \in X \times X$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall (x,y) \quad d_?\big((x_0,y_0),(x,y)\big) < \delta \Rightarrow |d(x_0,y_0) - d(x,y)| < \delta$$

umieć szacować to!

Rachunki poboczne:

$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ $\qquad$ $d(b,c) \leq d(b,a) + d(a,c)$

$d(a,b) - d(b,c) \leq d(a,c)$ $\qquad$ $d(b,c) - d(a,b) \leq d(a,c)$

$$|d(a,b) - d(b,c)| \leq d(a,c)$$

$$|d(x_0,y_0) - d(x,y)| \leq |d(x_0,y_0) - d(x_0,y) + d(x_0,y) - d(x,y)| \leq$$

$$|d(x_0,y_0) - d(x_0,y)| + |d(x_0,y) - d(x,y)| \leq d(y_0,y) + d(x_0,x) =$$

$$= d_1\big((x,y),(x_0,y_0)\big)$$

z rachunków pobocznych.

w miejscu ? należy wziąć 1

Wystarczy użyć $\delta = \varepsilon$.