PRZYKŁADY ODWZOROWAŃ CIĄGŁYCH (i nieciągłych) c.d.

(2) $X=\mathbb{R}^2$, $Y=\mathbb{R}$, zwykła topologia

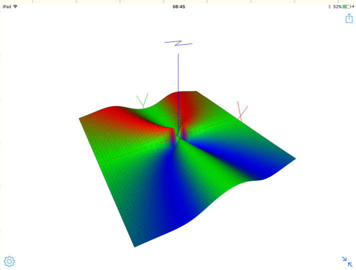
$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ dla } (x,y)\neq(0,0) \quad f(0,0)=0$$

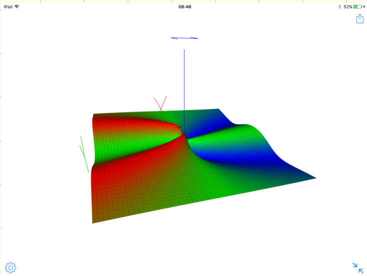
Niech $x_n \longrightarrow 0$, $a\in\mathbb{R}$ $\quad f(x_n,ax_n)=\dfrac{ax_n^3}{x_n^4+a^2x_n^2}=\dfrac{ax_n}{x_n^2+a^2}\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$y_n\to 0$, $a\in\mathbb{R}$ $\quad f(ay_n,y_n)=\dfrac{a^2y_n^3}{a^4y_n^4+y_n^2}=\dfrac{a^2y_n}{a^4y_n^2+1}\xrightarrow{n\to 0} 0$

$x_n\to 0$ $\quad y_n=ax_n^2$, $a\neq 0$ $\quad f(x_n,ax_n^2)=\dfrac{ax_n^4}{x_n^4+a^2x_n^4}=\dfrac{a}{1+a^2}\neq 0$

f jest stała na parabolach $y=ax$ i różna od zera. Nie jest więc ciągła w $(0,0)$.





(3) Naturalne operacje związane z iloczynem kartezjańskim są ciągłe
$(X,d),(Y,\rho)$

$$X\times Y \xrightarrow{pr_1} X \qquad (x,y)\longmapsto x \qquad\qquad \text{dla } X=Y \quad X\xrightarrow{\delta} X\times X$$

$$X\times Y \xrightarrow{pr_2} Y \qquad (x,y)\longmapsto y \qquad\qquad x\longmapsto (x,x)$$

Pokażemy ciągłość pr_1: Niech $\varepsilon>0$, ustalmy $(x_0,y_0)\in X\times Y$. Warunek ciągłości:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(x,y)\ D_\infty((x,y),(x_0,y_0))<\delta \Rightarrow d(x,x_0)<\varepsilon$$

$$D_\infty((x,y),(x_0,y_0))=\max\{d(x,x_0),\rho(y,y_0)\}$$

tzn $d(x,x_0) \leq D((x,y),(x_0,y_0))$. Wystarczy więc wziąć $\delta = \varepsilon$.

(4) $X=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $Y=\mathbb{R}$, normalna topologia, operacje arytmetyczne są ciągłe: $(t,s)\longmapsto t+s$, $(t,s)\longmapsto ts$

$|t+s-t_0-s_0| \leq |t-t_0|+|s-s_0| < \delta$ $\longrightarrow$ metryka d_1 i $\varepsilon=\delta$

$t_n \to t_0$
$s_n \to s_0$ $\quad |s_nt_n - s_0t_0| = |s_nt_n - s_0t_n + s_0t_n - s_0t_0| \leq |t_n||s_n-s_0| + |s_0||t_n-t_0|$

(t_n) zbieżny, więc ograniczony $\quad \leq |T||s_n-s_0| + |s_0||t_n-t_0| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $Y=\mathbb{R}$ $\quad t\longmapsto \frac{1}{t}$

$t_n \to t_0$

$$\left|\frac{1}{t_n}-\frac{1}{t_0}\right| = \left|\frac{t_0-t_n}{t_0t_n}\right| = \frac{1}{t_0}\frac{|t_n-t_0|}{|t_n|} \leq \frac{1}{t_0}\frac{|t_n-t_0|}{\varepsilon} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$t_0\neq 0$ wobec tego istnieje ε: $|t_n|>\varepsilon$ dla dużych n

(5) Operacje „wektorowe" w $\mathbb{R}^n$ są ciągłe

$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \ni (x,y)\longmapsto x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \ni (\alpha,x)\longmapsto \alpha\cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

WNIOSEK: z (4) i (3) oraz z ciągłości złożenia odwzorowań ciągłych wynika, że funkcje wymierne są ciągłe tam gdzie określone. Funkcja z przykładu (2) jest więc ciągła wszędzie poza wątpliwym punktem $(0,0)$, który badaliśmy oddzielnie.

(6) Funkcja rzeczywista nieciągła nigdzie

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

Funkcja rzeczywista ciągła w $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, nieciągła w $\mathbb{Q}$

dla $x=\frac{p}{q}$ $f(x)=\frac{1}{q}$ $\quad$ dla $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $f(x)=0$

CIĄGŁOŚĆ JEDNOSTAJNA

Oprócz pojęcia ciągłości w punkcie i ciągłości na zbiorze w przestrzeniach metrycznych mamy też pojęcie ciągłości jednostajnej. To pojęcie ma charakter metryczny:

DEFINICJA (X,d), (Y,ρ) p.m. $f: X \to Y$. Mówimy, że f jest *jednostajnie ciągła* jeśli zachodzi warunek:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x,x'\in X\quad d(x,x')<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(x'))<\varepsilon$$

Warunek jednostajnej ciągłości jest mocniejszy niż warunek ciągłości na X. Porównajmy:

zwykła ciągłość na X:

$$\forall x_0\in X\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\quad d(x,x_0)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

jednostajna ciągłość na X

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,x_0\quad d(x,x_0)<\delta\Rightarrow \rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

Warunki są podobne, różni je kolejność kwantyfikatorów. Liczby ε i δ muszą być dla ciągłości jednostajnej wspólne dla wszystkich punktów. Dla zwykłej ciągłości δ może zależeć od ε i x_0. Funkcja $x \mapsto e(x)$ jest ciągła ale nie jednostajnie ciągła. Wśród wielomianów jednostajnie ciągłe są jedynie stałe i pierwszego rzędu.

Istnieje jeszcze jeden rodzaj „ciągłości" istotny przy równaniach różniczkowych: Jeśli f spełnia

$$\exists L\in\mathbb{R}:\ \forall x,x'\in X\quad \rho(f(x),f(x'))\leq L\,d(x,x')$$

mówimy, że odwzorowanie jest *lipschitzowskie*, a sam warunek nazywamy warunkiem

Rudolf Lipschitz
1832–1903

Każde odwzorowanie lipschitzowskie jest jednostajnie ciągłe, każde odwzorowanie jednostajnie ciągłe jest ciągłe.

ZE SŁOWNIKA: Jeśli $f: X \to Y$ jest bijekcją, jest ciągłe i jego odwrotność też jest ciągła, to takie odwzorowanie nazywamy homeomorfizmem. Homeomorfizmy zachowują wszelkie własności topologiczne (tzn związane ze zbiorami otwartymi). Jeśli istnieje homeomorfizm między dwiema przestrzeniami to topologicznie rzecz biorąc te przestrzenie są takie same. Dla przestrzeni metrycznych odpowiednim pojęciem jest izometria, czyli odwzorowanie zachowujące odległości między punktami.

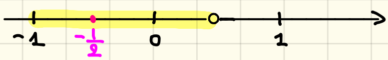
Wkrótce przejdziemy do omawiania kolejnych pojęć natury topologicznej, mianowicie zwartości, spójności. Przyda nam się do tego jeszcze jeden, dość abstrakcyjny koncept.

TOPOLOGIA NA PODZBIORACH: Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną a $A \subset X$ pewnym podzbiorem. Oczywiście d można obciąć do A, tzn używać jej tylko dla punktów z A.

$$d_{|A}: A \times A \to \mathbb{R}$$

Można więc (A, d_A) potraktować jako „oddzielną" przestrzeń metryczną ze swoimi własnymi zbiorami otwartymi. Zobaczmy co może się wydarzyć: $X = \mathbb{R}$, zwykła metryka, $A = [-1,1]$. Rozważmy kulę o środku w punkcie $-\frac{1}{2}$ i promieniu 1 w przestrzeni A:

$$K^A(-\tfrac{1}{2}, 1) = \{t \in A : |t + \tfrac{1}{2}| < 1\} = [-1, \tfrac{1}{2}[$$



Odcinek $[-1,\frac{1}{2}[$ jest kulą otwartą w A, a więc jest zbiorem otwartym w A. Traktowany jako podzbiór $\mathbb{R}$ nie jest zbiorem otwartym. Potrzebujemy ogólnego sposobu rozpoznawania zbiorów otwartych i domkniętych w przestrzeni będącej podzbiorem przestrzeni metrycznej.

FAKT: (X,d) – p.m. $A\subset X$. (1) Zbiór $\vartheta\subset A$ jest otwarty w A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\mathcal{U}\subset X$ otwarty taki, że $\vartheta=\mathcal{U}\cap A$. (2) Zbiór $D\subset A$ jest domknięty w A wtedy i tylko wtedy gdy istnieje zbiór $F\subset X$ domknięty taki, że $F\cap A=D$.

DOWÓD: Zauważmy przede wszystkim, że kule w przestrzeni A powstają jako przecięcie kul w przestrzeni X ze zbiorem A:

$$K^A(a,r)=K^X(a,r)\cap A$$

(1) $\Rightarrow$ ϑ otwarty w A oznacza że $\vartheta=\bigcup_{i\in I}K^A(a_i,r_i)$ gdzie I jest jakimś zbiorem indeksów. W szczególności można wziąć $I=\vartheta$.
Wtedy jako $\mathcal{U}$ można wziąć $\bigcup_{i\in I}K^X(a_i,r_i)$. $\mathcal{U}$ jest oczywiście otwarty w X i $\mathcal{U}\cap A=\vartheta$

$\Leftarrow$ Weźmy teraz $\mathcal{U}\subset X$ otwarty i $\vartheta=\mathcal{U}\cap A$. Z otwartości $\mathcal{U}$ wynika, że dla $a\in\mathcal{U}\cap A$ istnieje $K^X(a,r)\subset\mathcal{U}$. Weźmy $K^X(a,r)\cap A=K^A(a,r)$ mamy oczywiście $K^A(a,r)\subset\mathcal{U}\cap A=\vartheta$ zatem a jest punktem wewnętrznym ϑ względem A.

(2) Dla zbiorów domkniętych użyjemy związku między zbiorami otwartymi i domkniętymi:

$$(D \text{ domknięty w } A)\Leftrightarrow((A\setminus D)\text{ otwarty w } A)\Leftrightarrow A\setminus D=\mathcal{U}\cap A$$

dla pewnego zbioru $\mathcal{U}$ otwartego w X, ten w szczególności $X\setminus\mathcal{U}$ jest domknięty w X

$$(X\setminus\mathcal{U})\cap A \;=\; A\setminus\mathcal{U} \;=\; A\setminus(\mathcal{U}\cap A)=A\setminus D$$

$$\overset{\shortparallel}{\{x:\ x\in A \text{ i } x\notin\mathcal{U}\}}$$

jako F można wziąć $X\setminus\mathcal{U}$. ■