ZBIORY ZWARTE

§ 8. Zwartość

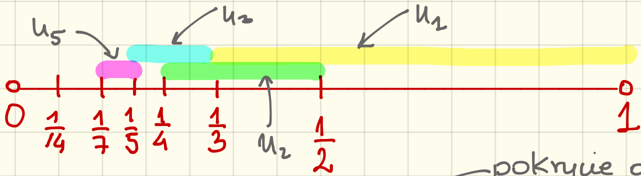
Jakąż cudowną własnością jest zwartość! Zwłaszcza w topologii różniczkowej czy algebraicznej z reguły wszystko robi się szybciej, łatwiej i pełniej, mając zwarte przestrzenie, rozmaitości, CW-kompleksy, grupy itd. I chociaż nie wszystko na świecie jest zwarte, to dla „niezwartych" problemów przypadek zwarty jest częstokroć dobrym punktem wyjścia. Musimy najpierw opanować „zwarty teren", który jest łatwiejszy do zdobycia, a następnie, modyfikując wypracowane już techniki, poszerzyć naszą drogę dla niezwartego przypadku. Tę regułę potwierdzają wyjątki. Niekiedy niezwartość także oferuje korzyści, dając „więcej miejsca" dla pewnych konstrukcji... Ale najpierw

Definicja (zwartość). Przestrzeń topologiczną nazywamy *zwartą*, jeśli każde jej otwarte pokrycie ma skończone podpokrycie. Oznacza to, że X jest zwarta, jeśli spełniony jest następujący warunek: Jeśli $\mathfrak{A} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest dowolnym otwartym pokryciem przestrzeni X, tzn. $U_\lambda \subset X$ są otwarte oraz $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = X$, to istnieje skończona liczba indeksów $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ takich, że $U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_r} = X$.

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $S \subset X$ dowolnym podzbiorem. Rodzinę podzbiorów $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ nazywamy pokryciem zbioru S jeśli $S \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Pokrycie nazywamy otwartym jeśli każdy ze zbiorów U_α jest otwarty.

pokrycie otwarte

$S =]0,1[\subset \mathbb{R}$ $\quad U_n =]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}[$ $\quad (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest pokryciem otwartym zbioru S



pokrycie otwarte

$(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad O_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ jest pokryciem zbioru S

to nie jest pokrycie otwarte

$(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad D_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ też jest pokryciem S

otwarte

$(Q_i)_{i\in\{1,2\}}$ $\quad Q_1 =]-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$ $\quad Q_2 =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ też jest pokryciem S

$(K_t)_{t\in S}$ $\quad K_t = K(t,\varepsilon)$ $\quad \varepsilon > 0$ też jest pokryciem S

otwarte

Pokrycie $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ jest podpokryciem pokrycie $(O_\beta)_{\beta\in B}$ jeśli (U_α) jest pokryciem zbioru S i dla każdego $\alpha \in A$ istnieje $\beta\in B$ takie, że $U_\alpha = O_\beta$. Wybieranie podpokrycie polega więc na wybieraniu niektórych elementów rodziny O_β, wystarczająco wielu aby ich suma zawierała zbiór S.

Weźmy np pokrycie $(K_t)_{t\in S}$ zbioru $S =]0,1[$ i wybierzmy w S podzbiór punktów

$t_0 = \frac{\varepsilon}{2}$, $t_1 = \varepsilon$ $\quad t_2 = \frac{3}{2}\varepsilon$ $\;\dots\;$ $t_k = \frac{k+1}{2}\cdot\varepsilon$ $\;\dots\;$ Niech r oznacza najmniejszą liczbę naturalną taką, że $t_r + \varepsilon > 1$ wtedy rodzina

$$(K_{t_i})_{i\in\{0,1,\dots,r\}} \text{ jest podpokryciem pokrycie } (K_t)$$

Pokrycie nazywamy skończonym jeśli zbiór indeksów jest skończony. W powyższych przykładach skończone są $(K_{t_i})_{t\in\{0,\dots,r\}}$ i $(D_i)_{i\in\{1,2\}}$

DEFINICJA: Zbiór $K\subset X$ jest zwarty jeśli z każdego pokrycia otwartego zbioru K można wybrać podpokrycie skończone

Ta definicja jest dość abstrakcyjna i ponadto trudna do sprawdzania ze względu na ogólny kwantyfikator – z każdego pokrycia...

W takiej sytuacji potrzebujemy twierdzeń i przykładów, żeby zrozumieć o co tak naprawdę chodzi!

Zauważmy po pierwsze, że

FAKT Zbiór zwarty K w przestrzeni metrycznej (X,d) jest ograniczony.

3

DOWÓD: Wykorzystamy następujące pokrycie: Niech $x \in K$. Weźmy $\mathcal{U}_n = \mathcal{K}(x,n)$. Mamy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n = X \supset K$ zatem $(\mathcal{U}_n)$ jest pokryciem K. Zgodnie z definicją wybieramy podpokrycie skończone. Odpowiedni zbiór indeksów to $\{n_1,\dots,n_r\}$. Wiadomo że $\mathcal{K}(x,n) \subset \mathcal{K}(x,m)$ jeśli $m>n$, czyli

$$K \subset \bigcup_{i\in\{1..r\}} \mathcal{U}_{n_i} = K(x, \max\{n_1,\dots,n_r\})$$

■

PRZYKŁAD: Domknięty przedział $[0,1]$ jest zwarty: Niech $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$ będzie otwartym pokryciem przedziału $[0,1]$. Wykażemy najpierw że istnieje liczba $\varepsilon>0$ taka że każdy przedział długości ε zawarty w $[0,1]$ zawiera się w całości w którymś ze zbiorów pokrycia.

a.a. Załóżmy, że tak nie jest. Oznacza to, że dla dowolnego n istnieje x_n taki, że $[x_n - \frac{1}{2n}, x_n + \frac{1}{2n}]$ nie zawiera się w całości w żadnym zbiorze pokrycia. Punkty (x_n) tworzą ograniczony ciąg liczbowy. Pokazaliśmy wcześniej, że taki ciąg zawiera podciąg zbieżny. Weźmy ten podciąg (x_{n_k}) i oznaczmy jego granicę x_0. Granica ta musi należeć do $[0,1]$, zatem musi należeć do któregoś ze zbioru pokrycia. Zbiór ten jest otwarty, zatem x_0 jest jego punktem wewnętrznym – zawiera się w nim wraz z pewną kulą o promieniu δ. Z definicji granicy ciągu wynika, że istnieje k takie, że $[x_{n_k} - \frac{1}{2n_k}, x_{n_k} + \frac{1}{2n_k}]$ zawiera się w tej kuli, zatem także w jednym zbiorze pokrycia! Jest to sprzeczne z konstrukcją (x_n).

Wiemy teraz, że takie ε istnieje. Odcinek $[0,1]$ można pokryć skończoną liczbą przedziałów o dł. ε. Każdy z nich zawarty jest w całości w pewnym zbiorze pokrycia. Biorąc odpowiednie elementy pokrycia zawierające przedziały otrzymujemy skończone podpokrycie pokrycia $(\mathcal{O}_\alpha)$.

W powyższym przykładzie używaliśmy pewnego ciągu z którego dawało się wybrać podciąg zbieżny. To nie jest przypadkowa technika dowodzenia zwartości!

DEFINICJA: Zbiór $K \subset X$ nazywamy ciągowo-zwartym jeśli z każdego ciągu elementów w K można wybrać podciąg zbieżny do elementu zbioru K.

Dowodzimy natychmiast, że

FAKT: Zbiór ciągowo zwarty jest domknięty

DOWÓD: Weźmy x_0 - punkt skupienia K, gdzie K jest ciągowo zwarty. Wtedy istnieje ciąg (x_n): $\forall_n \, x_n \in K$ oraz $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Z ciągowej zwartości wynika, że z (x_n) można wybrać podciąg zbieżny do punktu z K. Jednak wszystkie podciągi ciągu zbieżnego są zbieżne do granicy tego ciągu. Wniosek $x_0 \in K$. ∎

Warunek ciągowej zwartości jest łatwiejszy do sprawdzenia. Co prawda też jest kwantyfikator ogólny - z każdego ciągu ale z ciągami jednak łatwiej się pracuje niż z pokryciami. Ucieszy nas zatem twierdzenie

TWIERDZENIE: W przestrzeni metrycznej zbiór jest ciągowo zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest zwarty.

Dowód $\Leftarrow$ jest względnie prosty. Dowód $\Rightarrow$ wymaga trochę pracy. W dużym stopniu wykonaliśmy ją jednak dowodząc, że $[0,1]$ jest zwarty. Zanim więc zaczniemy formalny dowód twierdzenia zidentyfikujmy kluczowe elementy posługując się przykładem.

W dowodzie zwartości $[0,1]$ ważne było, że: (1) z każdego ciągu liczbowego o wyrazach z $[0,1]$ można wybrać podciąg zbieżny - to będziemy mieli jako założenie w ogólnym przypadku

(2) Dla dowolnej liczby $\varepsilon>0$ odcinek $[0,1]$ można pokryć skończoną liczbą odcinków o długości ε. W przypadku $[0,1]$ to jest trywialne, w przypadku ogólnym już samo sformułowanie odpowiedniego warunku wymaga skupienia. Odcinki o długości ε zastąpimy kulami o promieniu ε. (3) Obserwacja, że dla każdego pokrycia istnieje liczba ε taka, że każdy odcinek o długości ε zawarty jest w jednym ze zbiorów pokrycia. (1), (2), (3) razem dało zwartość $[0,1]$. W ogólnym przypadku spróbujemy podobnie.

5

Najpierw kwestia warunku (2). Ustalmy zbiór $K \subset X$ (X,d) p.m. Ustalmy także liczbę $\varepsilon>0$. Zbiór $S \subset K$ nazwiemy ε-siecią jeśli spełniony jest warunek

$$\forall y \in K \ \exists x \in S : y \in \mathcal{K}(x,\varepsilon)$$

Mówiąc inaczej rodzina kul $\left(\mathcal{K}(x,\varepsilon)\right)_{x\in S}$ jest otwartym pokryciem K.

LEMAT: Jeśli K jest ciągowo zwarty to dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje skończona ε-sieć $S \subset K$. Skończona, tzn $|S|<\infty$.

DOWÓD: Dla ustalonego ε skonstruujemy ε-sieć. Zacznijmy od dowolnego punktu $x_1 \in K$. Weźmy $\mathcal{U}_1 = \mathcal{K}(x_1,\varepsilon)$. Jeśli $K \subset \mathcal{U}_1$ skonstruowaliśmy $S=\{x_1\}$, w przeciwnym razie bierzemy $x_2 \in K \setminus \mathcal{U}_1$ i oznaczamy $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{K}(x_2,\varepsilon)$. Sprawdzamy czy $K \subset \mathcal{U}_2$. Jeśli tak to skonstruowaliśmy sieć. Jeśli nie, to kontynuujemy wybieranie kolejnych punktów. Jeśli ten proces zakończy się na $K \subset \mathcal{U}_r$ to otrzymamy skończoną sieć $\{x_1,\dots,x_r\}$. Jeśli się nie zakończy to skonstruujemy ciąg (x_n) elementów z K. Ten ciąg ma taką własność, że każdy element x_m jest odległy o przynajmniej ε od poprzednich. Innymi słowy

$$\forall m,n \in \mathbb{N} \quad d(x_n,x_m) > \varepsilon$$

Z drugiej strony, ten ciąg jako ciąg z K zawiera podciąg zbieżny. To zaś oznacza, że dla $m > M$ $d(x_{n_m}, x_0) < \varepsilon/2$, zatem dla $m, m' > M$ 6

$$d(x_{n_m}, x_{n_{m'}}) \leq d(x_{n_m}, x_0) + d(x_0, x_{n_{m'}}) < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$$

co jest sprzeczne z konstrukcją (x_n). Oznacza to, że konstrukcja (x_n) musi się kończyć na którymś kroku. ■

Pora na warunek (3). Jest zasadniczo b.z.

LEMAT: Jeśli K jest ciągowo zwarty to zachodzi warunek:

$$\forall (\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A} \; K \subset \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad \forall x \in K \; \exists \alpha \in A \; K(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_\alpha$$

DOWÓD: Też w zasadzie bez zmian c.o.: Zapiszmy zaprzeczenie:

$$\exists (\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A} \cdots \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in K \quad \forall \alpha \in A \quad K(x, \varepsilon) \not\subset \mathcal{U}_\alpha$$

Podobnie jak poprzednio bierzemy odpowiednie x_n dla $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Dostajemy ciąg (x_n) elementów K, wybieramy podciąg zbieżny do $x_0 \in K$

$x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x_0$. Punkt x_0 należy do pewnego $\mathcal{U}_\alpha$ i jest jego punktem wewnętrznym, istnieje więc $\delta > 0$ taka, że $K(x_0, \delta) \subset \mathcal{U}_\alpha$. W kuli tej są prawie wszystkie elementy ciągu x_{n_k}. Można wybrać k na tyle duże aby $K(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset \mathcal{U}_\alpha$. To jest sprzeczne z konstrukcją ciągu (x_n). ■

DOWÓD TWIERDZENIA $\Leftarrow$ Weźmy $K \subset X$ ciągowo zwarty i weźmy dowolne otwarte pokrycie $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ zbioru K. Niech $\varepsilon > 0$ będzie takie jak w lemacie (2). Na mocy lematu (1) istnieje ε-sieć $S = \{x_1, \dots, x_r\}$ dla K. Każda kula $\mathcal{K}(x_i, \varepsilon)$ jest zawarta w pewnym zbiorze $\mathcal{U}_{\alpha_i}$ pokrycia. Skoro $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{K}(x_i, \varepsilon) \supset K$ to także $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{U}_{\alpha_i} \supset K$. Pokrycie $(\mathcal{U}_{\alpha_i})_{i \in \{1, \dots, r\}}$ jest skończonym podpokryciem $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$. ■

DOWÓD TWIERDZENIA $\Rightarrow$ Zakładamy, że zbiór K jest zwarty. Weźmy dowolny ciąg (x_n) elementów z K. Jeśli ten ciąg przyjmuje jedynie skończoną liczbę wartości to można z niego wybrać podciąg zbieżny – stały i dowód jest zakończony. Warto zatem zajmować się dalej ciągiem który ma nieskończenie wiele wartości.

Przeprowadźmy następującą analizę: Mamy dowodzić, że z ciągu (x_n) można wybrać podciąg zbieżny do granicy w K. Inaczej mówiąc mamy dowodzić, że istnieje punkt $x_0 \in K$ taki, że w jego każdym otoczeniu jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Spróbujemy dowodzić a.a. zaczynając od zaprzeczenia wyróżnionego zdania.

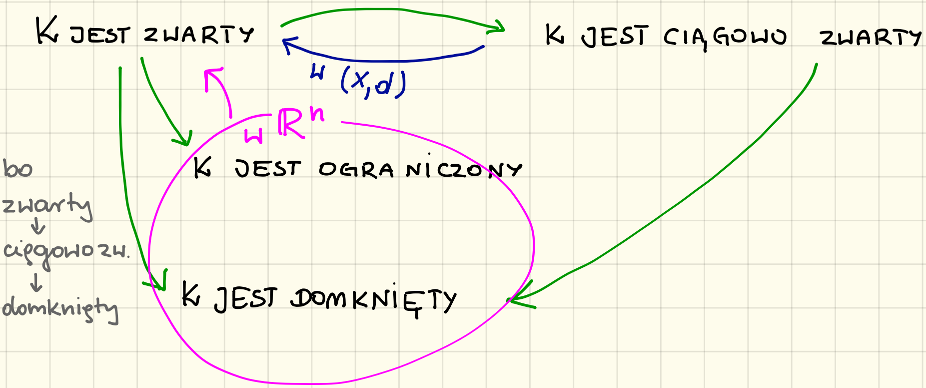
Załóżmy, że wyróżnione zdanie jest nieprawdziwe, tzn prawdziwe jest jego zaprzeczenie:

Dla każdego punktu $y \in K$ istnieje jego otoczenie $\mathcal{U}_y$ zawierające jedynie skończoną liczbę wyrazów ciągu (x_n).

Rodzina $(\operatorname{Int} \mathcal{U}_y)_{y \in K}$ stanowi otwarte pokrycie zbioru K. Na mocy jego zwartości istnieje skończone podpokrycie tego pokrycia: $(\operatorname{Int} \mathcal{U}_{y_i})_{i=1}^{r}$. Mamy więc r zbiorów, w każdym skończoną liczbę wyrazów ciągu (x_n). Ostatecznie więc ciąg (x_n) ma w ogóle skończoną liczbę wyrazów. Jest to sprzeczne z poczynionym wcześniej założeniem. ■

Zauważmy, że w dowodzie twierdzenia ⇐ nie korzystaliśmy w ogóle z metryki. Pojawiły się pojęcia czysto topologiczne: zbieżność, punkt skupienia, otoczenie. Twierdzenie „każdy zbiór zwarty jest ciągowo zwarty" jest prawdziwe ogólnie a nie tylko w przestrzeniach metrycznych.

Co do tej pory wiemy:



Okazuje się więc, że każdy zbiór zwarty jest ograniczony i domknięty. Odwrotnie nie zawsze, chyba że jesteśmy w $\mathbb{R}^n$:

FAKT: W $\mathbb{R}^n$ z normalną topologią każdy zbiór ograniczony i domknięty jest zwarty.

DOWÓD: „Normalna" topologia w $\mathbb{R}^n$ pochodzi od metryki, możemy więc dowodzić ciągowej zwartości. Weźmy w $\mathbb{R}^n$ zbiór D ograniczony i domknięty. Ograniczony, tzn. zawarty w pewnej kuli. Kulę tę można wybrać względem dowolnej metryki np. metryki D_∞. Z ograniczoności D wynika więc, że rzut na każdą składową w iloczynie

Kartezjańskim jest ograniczony:

$$\pi_k : \mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R} \ni (x^1,\dots,x^m) \longmapsto x^k \in \mathbb{R}$$

$\forall k\in\{1,\dots,m\}\ \exists\, a_k<b_k : \pi_k(D)\subset[a_k,b_k]$. Weźmy teraz dowolny

ciąg (x_n) wyrazów z D. Ciąg $\pi_1(x_n)$ jest ciągiem ograniczonym w $\mathbb{R}$, ma więc punkt skupienia $x_0^1\in[a_1,b_1]$. Wybierzmy podciąg ciągu $\pi_1(x_n)$ zbieżny do x_0^1. Podciąg ten odpowiada ciągowi indeksów n_{l_1}. W ten sposób także z ciągu (x_n) w D możemy wybrać podciąg $(x_{n_{l_1}})$. Dalej, zaczynając od $(x_{n_{l_1}})$ konstruujemy $\pi_2(x_{n_{l_1}})$, obserwujemy że jest ograniczony, ma punkt skupienia, wybieramy podciąg zbieżny do punktu skupienia i wracamy do odpowiedniego podciągu $(x_{n_{l_{1 l_2}}})$ wyrazów z D. Ten proces powtarzamy tyle razy ile mamy współrzędnych. Po m-tym kroku mamy podciąg ciągu (x_n) (oznaczmy go x_{n_k} składając wszystkie operacje wyboru podciągu w jedną) o tej własności że każdy z ciągów $\pi_i(x_{n_k})$ jest zbieżny do x_0^i. Sam ciąg x_{n_k} jest więc zbieżny do $(x_0^1,\dots,x_0^m)$. Z domkniętości D wynika że $x_0=(x_0^1,\dots,x_0^m)$ jest elementem D. Z ciągu (x_n) wybraliśmy więc podciąg zbieżny do elementu z D. Wykazaliśmy że D jest ciągowo zwarty.