ZWARTOŚĆ i CIĄGŁOŚĆ

W przypadku poprzednio omawianych własności topologicznych zastanawialiśmy się jak zachowuje się te własności względem odwzorowań ciągłych. Okazało się wówczas, że przeciwobrazy zbiorów otwartych/domkniętych względem odwzorowań ciągłych są otwarte/domknięte. W drugą stronę to nie działa, to znaczy obrazy otwartych/domkniętych nie muszą być otwarte/domknięte.

Własność zwartości zachowuje się inaczej. Weźmy funkcję $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \sin x \in \mathbb{R}$ wiadomo, że $\sin(\mathbb{R}) = [-1,1]$, czyli $\sin^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$. Odcinek $[-1,1]$ jest zwarty, $\mathbb{R}$ nie jest zwarte. Prawdziwy jest następujący fakt:

FAKT: Niech X, Y przestrzenie metryczne, $f: X \to Y$ ciągłe. Jeśli $K \subset X$ jest zbiorem zwartym to także $f(K) \subset Y$ jest zbiorem zwartym. (Własność ta jest prawdziwa w dowolnej przestrzeni topologicznej)

DOWÓD: Niech $(\theta_\alpha)_{\alpha \in A}$ $\theta_\alpha \subset Y$ będzie pokryciem otwartym zbioru $f(K)$. Wtedy oczywiście $(f^{-1}(\theta_\alpha))_{\alpha \in A}$ jest pokryciem otwartym zbioru K. K jest zwarty, zatem z pokrycia $(f^{-1}(\theta_\alpha))_{\alpha \in A}$ można wybrać skończone podpokrycie zbioru K. Indeksy odpowiadające zbiorom tego podpokrycia oznaczymy $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Mamy więc

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{r} f^{-1}(\theta_{\alpha_n}) \quad \text{Wtedy naturalnie} \quad f(K) \subset \bigcup_{m=1}^{r} \theta_{\alpha_n}$$

Zatem rodzina $(\theta_{\alpha_n})_{n \in \{1,\dots,r\}}$ jest skończonym podpokryciem pokrycia $(\theta_\alpha)_{\alpha \in A}$ zbioru $f(K)$. Zbiór $f(K)$ jest zwarty ■

Zbadajmy konsekwencje tego faktu dla funkcji rzeczywistych określonych na podzbiorach $\mathbb{R}$: Niech $f: \mathbb{R} \supset \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i niech $K \subset \mathcal{O}$ będzie zbiorem zwartym. Zgodnie ze stwierdzeniem jak wyżej zbiór $f(K) \subset \mathbb{R}$ jest zwarty a więc ograniczony i domknięty. Ograniczony, to znaczy $\inf \underbrace{f(K)}_{\{f(x)\,:\,x\in K\}}$ i $\sup \underbrace{f(K)}_{\{f(x)\,:\,x\in K\}}$ są liczbami skończonymi. Liczby te są ponadto punktami skupienia zbioru $f(K)$. Zbiór $f(K)$ jest domknięty, zatem zawiera $\inf f(K)$ i $\sup f(K)$. Innymi słowy istnieje $x_\downarrow \in K$ takie, że $f(x_\downarrow) = \inf f(K)$ oraz istnieje $x_\uparrow \in K$ takie, że $f(x_\uparrow) = \sup f(K)$. Prawdziwy jest zatem fakt:

2

FAKT Funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy.

PRZYKŁADY:

(1) $x \longmapsto \sin(x)$ jest ciągła $\sin\left(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\right) =]-1,1[$ $\sup \sin\left(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\right) = 1$

$\inf \sin\left(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\right) = -1$ nie istnieją $x,y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ t.że $\sin(x)=1$, $\sin(y)=-1$

(2) $x \longmapsto tg(x)$ jest ciągła na $]-\pi/2,\pi/2[$ $tg\left(]-\pi/2,\pi/2[\right) = \mathbb{R}$ zatem

$\sup tg\left(]-\pi/2,\pi/2[\right) = \infty$

$\inf \quad \ldots \quad = -\infty$

otwarty więc niezwarty

(3) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ $\quad I =]1,2[\quad f(I) =]0,\frac{1}{2}[$ $\quad f^{-1}(0)\cap I = \emptyset$, $\quad f^{-1}(1/2)\cap I = \emptyset$

$D = [1,\infty[\quad f(D) = [0,1[$

domknięty ale niezwarty

$f^{-1}(1)\cap D = \emptyset$

$K = [1,2] \quad f(K) = [0,\frac{1}{2}]$ $\quad f^{-1}(1/2)\cap K = \{2\}$

$f^{-1}(0)\cap K = \{1\}$

zwarty

Badając jakąś własność zbiorów zastanawiamy się czasem jak ta własność zachowuje się względem sum, przecięć, czy przenosi się na podzbiory (jakie), czy przenosi się na iloczyny kartezjańskie... Takich pytań może być wiele, nie odpowiemy zapewne na wszystkie.

FAKT: Domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty.

DOWÓD: Niech K zwarty $D \subset K$ domknięty. Niech $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ będzie pokryciem otwartym zbioru D. Do tego pokrycie dołączymy jeszcze $O = X \setminus D$. O jest otwarty. Rodzina składająca się z U_α i O jest pokryciem zbioru K. Wybieramy z tego pokrycie podpokrycie skończone. Niech $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ będzie zbiorem elementów z A numerującym elementy skończonego pokrycia z (U_α). Mogą mieć miejsce dwa przypadki: O jest elementem podpokrycia skończonego – ponieważ $O \cap D = \emptyset$ i $D \subset K$ to $(U_\alpha)_{\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}}$ jest pokryciem (skończonym) D. Drugi przypadek: O nie należy do skończonego podpokrycia – wtedy $(U_\alpha)_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}}$ jest skończonym pokryciem K i D. W każdym przypadku wybraliśmy z $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ podpokrycie skończone zbioru D. ∎

Zobaczmy o ile łatwiej wykazać ciągową zwartość D: Niech (x_n) będzie ciągiem elementów z D. Jest to też ciąg elementów z K. Zawiera więc podciąg (x_{n_k}) zbieżny do x_0. D jest domknięty więc $x_0 \in D$.

FAKT $(X,d), (Y,\rho)$ p.m. $K \subset X$, $C \subset Y$ zwarte. Wtedy $K \times C \subset X \times Y$ też jest zwarty.

DOWÓD: Wykażemy ciągową zwartość: Weźmy (x_n) : $\forall n \; x_n \in K \times C$. $x_n = (k_n, c_n)$: $k_n \in K$, $c_n \in C$ ze zwartości: k_{m_l} zbieżny do $k_0 \in K$. Z ciągu c_{n_l} wybieramy $c_{m_{l_m}}$ zbieżny do $c_0 \in C$. Podciąg $x_{n_{l_m}} = (k_{m_{l_m}}, c_{n_{l_m}})$ jest zbieżny do $(k_0, c_0) \in K \times C$.

Pokryciowo też się da, ale jest to ciut bardziej złożone.

SPÓJNOŚĆ

ostatnia topologiczna własność o której powiemy dokładniej:

„Własności topologiczne takie jak np. spójność nabierają wszakże przy bliższym poznaniu...

> poznaniu pewnych zabarwień emocjonalnych. Niektóre stają się nam przyjazne i pomocne, gdy kilkakrotnie doświadczymy, jak ułatwiają lub wręcz umożliwiają przeprowadzenie dowodu; inne z kolei możemy traktować nieufnie z dokładnie przeciwstawnych powodów. Oczywiście własności o dobrej reputacji także mogą nam niekiedy przysporzyć kłopotów; bywają wreszcie własności zupełnie ambiwalentne. Otóż mogę Was zapewnić, że spójność, hausdorffowość i zwartość są w przeważającej mierze „dobrymi własnościami". Chciałoby się naturalnie wiedzieć, czy takie dobre własności przechodzą z „półproduktów" na „produkt końcowy" przy zwykłych konstrukcjach i procesach topologicznych. Oto więc

Podręcznikowa definicja spójności odnosi się zazwyczaj do spójności całej przestrzeni. W przypadku podzbioru przestrzeni topologicznej (metrycznej) trzeba obciąć topologię do podzbioru i sprawdzić spójność względem topologii indukowanej.

DEFINICJA Przestrzeń X nazywamy **niespójną** jeśli istnieją zbiory A, B niepuste i takie, że $A\cap B=\emptyset$ $A\cup B=X$ A, B otwarte. Przestrzeń nazywamy **spójną** jeśli nie jest niespójna.

Przyda się oczywiście jakieś kryterium spójności/niespójności dla podzbiorów bez obcinania topologii

FAKT: $S\subset X$ jest niespójny wtedy i tylko wtedy gdy $S=S_1\cup S_2$, $S_1,S_2\neq\emptyset$, $S_1\cup S_2=S$ $\overline{S_1}\cap S_2=S_1\cap\overline{S_2}=\emptyset$

DOWÓD: $\Leftarrow$ Jeśli S_1,S_2 spełniające powyższe warunki istnieją to pozostaje wykazać, że S_1,S_2 są otwarte w topologii indukowanej. $\overline{S_1}$ jest domknięte w X, $\overline{S_1}\cap S$ jest domknięte w S. Wykażemy, że $\overline{S_1}\cap S=S_1$ a.a. Załóżmy, że $\exists x\in\overline{S_1}\cap S$ i $x\notin S_1$. Skoro $x\in S$ i $x\notin S_1$ to $x\in S_2$, ale $\overline{S_1}\cap S_2=\emptyset$ – sprzeczność!

Wychodzi więc na to, że S_1 domknięty w topologii indukowanej, zatem S_2 otwarty. To samo rozumowanie z zamienionym 1 i 2 daje że S_1 otwarty.

$\Rightarrow$

Załóżmy, że S jest przestrzenią niespójną. Istnieją zatem A, B otwarte w S $A \cup B = S$ $A \cap B = \emptyset$ A, B niepuste. Weźmy $S_1 = A$, $S_2 = B$. Musimy wykazać że $\overline{S_1} \cap S_2 = \emptyset = S_1 \cap \overline{S_2}$ c.o. niech $x \in \overline{S_1} \cap S_2$. Wiadomo, że $x \notin S_1$ bo $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ zatem jest punktem skupienia S_1 ale $x \notin S_1$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad K(x, \varepsilon) \cap S_1 \neq \emptyset$$

z drugiej strony $x \in S_2$ a S_2 jest otwarty w S zatem $\exists \delta > 0 : K(x, \delta) \cap S \subset S_2$ weźmi $\varepsilon = \delta$ – skoro dla każdego ε, to dla $\varepsilon = \delta$ też:

$$\underset{\neq \emptyset}{K(x, \delta) \cap S_1} \subset K(x, \delta) \cap S \subset S_2 \qquad K(x, \delta) \cap S_1 \subset S_2$$

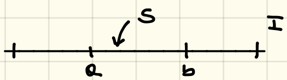
sprzeczność bo $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

zatem $\overline{S_1} \cap S_2 = \emptyset$ drugą część pokazujemy tak samo zamieniając indeksy.

PRZYKŁAD: Zbiory spójne w $\mathbb{R}$

Przedział jest zbiorem spójnym: c.o. Załóżmy że przedział I jest niespójny: $I = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ A, B niepuste i otwarte w I. Weźmy teraz $a \in A$, $b \in B$. Któryś z nich musi być mniejszy, załóżmy że $a < b$.
Weźmy

$$s = \inf\{ t \in B : a < t \}$$



s jest infimum podzbioru B, s jest więc punktem skupienia B, B jest domknięty w I więc $s \in B$. Zauważmy także, że s jest punktem skupienia A. Jeśli $s = a$, to $s \in A$ jeśli $s \neq a$ to $a < s$ i z definicji s odcinek $[a, s[\subset A$. S jest punktem skupienia A więc należy do A. $\underset{\neq \emptyset}{A \cap B = \emptyset}$ sprzeczność.

Zbiór spójny w $\mathbb{R}$ jest przedziałem: Weźmy $S \subset \mathbb{R}$ spójny. Niech $a = \inf S$, $b = \sup S$. $S \subset [a, b]$ a, b mogą być $-\infty, +\infty$. Warto rozważać tylko

$a<b$, bo jeśli $a=b$ to $S=\{a\}=[a,a]$ i jest to przedział, choć krótki.
Weźmy teraz $c\in]a,b[$. Jeśli $c\notin S$ to mamy

$$S_1=S\cap]-\infty,c[\qquad S_2=S\cap]c,+\infty[$$

$S_1\cap S_2=\emptyset$ $\quad S_1\cup S_2=S$ $\quad S_1,S_2$ otwarte w S

zatem S niespójny. Wnioskujemy zatem że $c\in S$. Mamy zatem możliwości

$$S=]a,b[\ ,\quad S=[a,b[\ ,\quad S=]a,b]\ ,\quad S=[a,b]$$

S spójny w $\mathbb{R}$ $\iff$ S jest przedziałem.

SPÓJNOŚĆ I CIĄGŁOŚĆ

FAKT: Ciągły obraz zbioru spójnego jest spójny (tzn: (X,d), (Y,ρ) p.m $f: X\to Y$ ciągła, $S\subset X$ spójny. Wtedy $f(S)$ jest spójny.

DOWÓD: Załóżmy, że $f(S)$ jest niespójny, tzn $f(S)=Z_1\cup Z_2$, $Z_1,Z_2\neq\emptyset$ $\overline{Z_1}\cap Z_2=\emptyset=Z_1\cap\overline{Z_2}$. Weźmy

$$S_1=f^{-1}(Z_1)\cap S \qquad S_2=f^{-1}(Z_2)\cap S$$

Jest jasne, że $S=S_1\cup S_2$ oraz $S_1\neq\emptyset$ i $S_2\neq\emptyset$.

Weźmy $x\in\overline{S_1}\cap S_2$ $\quad f(x)\in Z_2$ $\quad$ weźmy $x_n\in S_1$ $\lim x_n=x$ wtedy $f(x_n)\in Z_1$ i $\lim f(x_n)=f(x)\in\overline{Z_1}$ zatem $f(x)\in\overline{Z_1}\cap Z_2$ ale $\overline{Z_1}\cap Z_2=\emptyset$ – sprzeczność.

zamieniamy 1,2 żeby wykazać $Z_1\cap\overline{Z_2}=\emptyset$.

WNIOSKI DLA FUNKCJI RZECZYWISTYCH:

(1) I - przedział, f ciągła $\Rightarrow$ $f(I)$ jest przedziałem.

(2) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągła $\Rightarrow$ dla każdego y pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ istnieje x taki, że $f(x)=y$. (Własność Darboux)

(3) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągła injekcja $\Rightarrow$ f osiąga kresy na końcach przedziału.

DOWÓD: Przypuśćmy że f ma maksimum w $x_0 \in]a,b[$ $\leftarrow$ otwarty zatem dla pewnego $\varepsilon > 0$ $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset]a,b[$. Weźmy $y = \max\{f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)\}$. Istnieje wtedy $x_1 \in [x_0-\varepsilon, x_0[$ taki, że $f(x_1) = y$ i $x_2 \in]x_0, x_0+\varepsilon]$ taki, że $f(x_2)=y$ co jest sprzeczne z injektywnością. Dla min. podobnie.

(4) $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ ciągła injekcja $\Rightarrow$ $f(]a,b[)$ jest przedziałem otwartym

DOWÓD: Wiadomo że $f(]a,b[)$ jest przedziałem. Wykażemy, że żaden z końców nie może należeć do przedziału. Załóżmy że y_0 jest końcem $f(]a,b[)$ i $y_0 \in f(]a,b[)$ wtedy istnieje $x_0 \in]a,b[$: $f(x_0)=y_0$ i $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \subset]a,b[$ dla pewnego ε. Wtedy $f|_{[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]}$ osiąga kres wewnątrz przedziału – sprzeczność.

(5) $f: I \to \mathbb{R}$ ciągła injekcja $\Rightarrow$ f monotoniczna

(6) $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ ciągła injekcja, $]c,d[= f(]a,b[)$ $\Rightarrow$ $f^{-1}:]c,d[\to]a,b[$ jest ciągła.

ŁUKOWA SPÓJNOŚĆ

DEFINICJA Zbiór nazywamy **łukowo spójnym** jeśli każde jego dwa punkty można połączyć ciągłym obrazem odcinka $[0,1]$

FAKT: Każdy zbiór łukowo spójny jest spójny. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Dowód: Załóżmy że S jest łukowo spójny i niespójny

Weźmy $s_1 \in S_1$

$s_2 \in S_2$ i $f:[0,1] \to S$ ciągłe

$f(0)=s_1 \quad f(1)=s_2$

$S = S_1 \cup S_2$

$S_1, S_2 \neq \emptyset$

otwarte w S

$S_1 \cap S_2 = \emptyset$

$f([0,1])$ jest spójny, $\left(f([0,1]) \cap S_1\right) \cup \left(f([0,1]) \cap S_2\right) =$

$= f([0,1])$

sprzeczność

otwarte w $f([0,1])$, niepuste, mają puste przecięcie

Kontrprzykład na tw. odwrotne:

$X = \mathbb{R}^2 \quad S = \{(0,y) : y \in [-1,1]\} \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x > 0\}$ jest spójny ale nie łukowo spójny