POJĘCIE POCHODNEJ

W najbliższej przyszłości potrzebować będziemy pojęcia granicy odwzorowania w punkcie:

Niech (X,d), (Y,ρ) będą przestrzeniami metrycznymi. Niech $Z \subset X$ będzie podzbiorem, $f: Z \longrightarrow Y$ odwzorowaniem. Załóżmy także, że z_0 jest punktem skupienia Z.

DEFINICJA: Punkt $y_0 \in Y$ jest granicą f przy $z \to z_0$ jeśli $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in Z: \ d(z, z_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(z), y_0) < \varepsilon$. Pisać będziemy $\lim_{z \to z_0} f(z) = y_0$

Jeśli $X = Y = \mathbb{R}$ powyższa definicja obejmuje typowe przypadki:
Niech $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

jeśli $x_0 \in]a,b[$ piszemy $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ (jeśli granica istnieje)

jeśli $x_0 = a$ piszemy $\lim_{x \to a^+} f(x) = y_0$

$x_0 = b$ piszemy $\lim_{x \to b^-} f(x) = y_0$

Zachodzi oczywisty fakt:
FAKT: Niech $f: Z \longrightarrow Y$ i niech z_0 będzie punktem wewnętrznym Z. Funkcja f jest ciągła w z_0 wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

W dalszym ciągu wykładu mówimy o funkcjach określonych na przedziałach w $\mathbb{R}$ i o wartościach w $\mathbb{R}$.

DEFINICJA: Niech $r:]-\eta, \eta[\ni t \longmapsto r(t) \in \mathbb{R}$. Powiemy, że funkcja r jest małą wyższego rzędu niż t^n jeśli $\lim_{t \to 0} \frac{r(t)}{t^n} = 0$

Inaczej $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t \ |t| < \delta \Rightarrow \left| \frac{r(t)}{t^n} \right| < \varepsilon$

Poniższa definicja różniczkowalności funkcji w punkcie jest inna (choć równoważna) od tej spotykanej w większości podręczników (np w Rudinie, ale nie w zielonym skrypcie). Takie sformułowanie lepiej uogólnia się na wiele wymiarów:

DEFINICJA: Niech I będzie przedziałem otwartym, $x_0 \in U$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$. Mówimy że f jest **różniczkowalna w x_0** jeśli istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że

(*) $r(x_0,h) = f(x_0+h) - f(x_0) - ah$ jest małą wyższego rzędu

niż h, tzn $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(x_0,h)}{h} = 0$. Jeśli f jest różniczkowalna w każdym punkcie przedziału I to mówimy, że f jest **różniczkowalna na I**.

Wzór (*) zapisujemy często jako

$$f(x_0+h) = f(x_0) + a\cdot h + r(x_0,h)$$

OBSERWACJE

(1) funkcja różniczkowalna w x_0 jest ciągła w x_0.

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| = |f(x_0)+ah+r(x_0,h)-f(x_0)| = |ah+r(x_0,h)| =$$
$$= |h|\left|a - \frac{r(x_0,h)}{h}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+|a|}(1+|a|) = \varepsilon$$

może być dowolnie małe, weźmy $\delta_1: \left|\frac{r(x_0,h)}{h}\right| < 1$ wtedy

$$\left|a - \frac{r(x_0,h)}{h}\right| \leqslant |a|+1$$

ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{|a|+1}$ oraz $h: |h| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$

(2) liczba a, jeśli istnieje, jest wyznaczona jednoznacznie:

$$
\begin{array}{l}
f(x_0+h) = f(x_0) + ah + r(x_0,h) \\
- \; f(x_0+h) = f(x_0) + a'h + r(x_0,h) \\
\hline
0 = (a-a')h + r(x_0,h) - r'(x_0,h)
\end{array}
$$

$$h(a'-a) = r(x_0,h) - r'(x_0,h)$$

$$(a'-a) = \frac{r(x_0,h)}{h} - \frac{r'(x_0,h)}{h}$$

obo ilorazy można dowolnie zmniejszyć biorąc małe h. Jedyna możliwość, żeby równość była spełniona dla dowolnie małych h to $a-a'=0$.

(3) Jeśli f różniczkowalne to

$$f(x_0+h) - f(x_0) - r(x_0,h) = ah$$

$$\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\substack{h\to 0 \\ \downarrow \\ a}} - \underbrace{\frac{r(x_0,h)}{h}}_{\substack{\downarrow\, h\to 0 \\ 0}} = a \qquad a = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0)-f(x)}{h}$$

odwrotnie, załóżmy, że istnieje $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$. Zdefiniujmy

$$r(x_0,h) := f(x_0+h) - f(x_0) - a\cdot h$$

wtedy

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(x_0,h)}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{a} - a = 0$$

Zapiszmy więc fakt:

FAKT: Równoważne są następujące warunki

(1) f różniczkowalne w x_0 (2) istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

DEFINICJA: Jeśli f różniczkowalna w x_0 to liczbę a w definicji różniczkowalności nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$. Jeśli f różniczkowalna na I to funkcję

$x \longmapsto f'(x)$ nazywamy pochodną funkcji f.

PRZYKŁAD:

$x \longmapsto x^n$ Obliczmy (dla $x \in \mathbb{R}$) $(x+h)^n - x^n =$

$$x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n = nx^{n-1} + h\left(\binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1}\right)$$

Weźmy $a = nx^{n-1}$ i $r(x,h) = h\left(\binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1}\right)$. Wtedy

$$\frac{r(x,h)}{h} = \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

$x \longmapsto x^n$ jest różniczkowalna w $\mathbb{R}$ i $(x^n)' = nx^{n-1}$

PODSTAWOWE PRAWA RÓŻNICZKOWANIA

FAKT: $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f,g różniczkowalne w x_0, wtedy $(\lambda \in \mathbb{R})$

λf, $f+g$ i $f \cdot g$ są różniczkowalne w x_0 oraz prawdziwe są wzory

$$\underbrace{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \qquad (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)}_{\text{liniowość różniczkowania}}$$

$$\underbrace{(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}_{\text{Reguła Leibniza}}$$

DOWÓD:

$$\frac{(\lambda f)(x_0+h) - (\lambda f)(x_0)}{h} = \lambda \frac{(f(x_0+h) - f(x_0))}{h} \xrightarrow{h \to 0} \lambda f'(x_0)$$

$$\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$\xrightarrow{h\to 0} f'(x_0)+g'(x_0)$$

5

$$\frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=$$

$$=\underbrace{g(x_0+h)}_{\downarrow h\to 0 \;\; g(x_0)}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\xrightarrow{h\to 0} g(x_0)f'(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$$

■

FAKT: $f: I\to J$ $\quad g: J\to\mathbb{R}$ $\quad x_0\in I$, $f(x_0)\in J$, f różniczkowalna w x_0 i g różniczkowalna w $f(x_0)$. Wtedy $g\circ f$ jest różniczkowalne w x_0 i

$$\underbrace{(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).}$$ Reguła łańcuchowa (chain rule)

DOWÓD:

$$g\circ f(x+h)-g\circ f(x)=g(f(x+h))-g(f(x))=g\big(f(x)+\underbrace{f'(x)h+r_f(x,h)}\big)-g(f(x))=$$

gdy $h\to 0$ to $\uparrow$ dąży do zera, potraktujemy to jako „przyrost"

$$=\cancel{g(f(x))}+g'(f(x))\cdot[\underbrace{f'(x)\cdot h+r_f(x,h)}_{k}]+r_g(f(x),k)-\cancel{g(f(x))}=$$

$$=g'(f(x))f'(x)\cdot h+\underbrace{g'(f(x))r_f(x,h)+r_g(f(x),k)}_{r_{fg}(x,h)}$$

$$\frac{r_{fg}(x,h)}{h}=\underbrace{g'(f(x))\frac{r_f(x,h)}{h}}_{\downarrow h\to 0 \;\; 0}+\underbrace{\frac{r_g(f(x),k)}{k}}_{\downarrow h\to 0 \;\; 0\ (\text{bo } k\to 0)}\cdot\frac{k}{h} \quad ?$$

$$k=f'(x)\cdot h+r_f(x,h)$$

$$\frac{k}{h}=f'(x)+\frac{r_f(x,h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=f'(x)$$

Mamy więc $\frac{r_{fg}(x,h)}{h}\xrightarrow{h\to 0} 0$

■

POŻYTECZNE WZORY WYNIKAJĄCE Z POWYŻSZYCH RACHUNKÓW:

(1) $\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right)=\frac{1}{h}\,\frac{-h}{x(x+h)}=\frac{-1}{x(x+h)}\xrightarrow{h\to 0}-\frac{1}{x^2}$$

(2) Niech f będzie funkcją różniczkowalną w x i taką że $f(x)\neq 0$, wtedy $\frac{1}{f}$ też jest różniczkowalne

$$x \longmapsto \frac{1}{f(x)} \qquad \varphi\circ f$$

$$(\varphi\circ f)'(x)=\varphi'(f(x))f'(x)=-\frac{1}{f(x)^2}f'(x)=-\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

(3) niech f, g różniczkowalne w x_0, $g(x_0)\neq 0$ wtedy $\frac{f}{g}$ różniczkowalne w x_0 i

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)}-f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}=$$

$$=\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$$