WAŻNE TWIERDZENIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO

DEFINICJA: Niech $f: X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na przestrzeni metrycznej (X,d). Mówimy, że f ma w x_0 maksimum/minimum lokalne jeśli istnieje $\delta > 0$ taka, że $f(x_0) \geq f(x)$ dla wszystkich $x \in K(x_0, \delta)$. Minimum lub maksimum nazywamy ekstremum.

FAKT: Niech $f: I \to \mathbb{R}$. Jeśli f ma w x_0 lokalne maksimum/minimum i jest w tym punkcie różniczkowalne to $f'(x_0) = 0$.

DOWÓD: Dowód przeprowadzimy dla maksimum. Dla minimum będzie podobnie. Niech δ będzie jak w definicji ekstremum i takie, że $]x-\delta, x+\delta[\subset I$.

dla $-\delta < h < 0$ $\quad f(x+h) - f(x) < 0 \quad [f(x+h)-f(x)]/h > 0$

dla $0 < h < \delta$ $\quad f(x+h) - f(x) < 0 \quad [f(x+h)-f(x)]/h < 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = 0$$

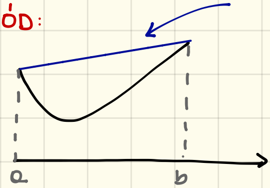
∎

TWIERDZENIE ROLLE'A $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągła i różniczkowalna w $]a,b[$, $f(a) = f(b)$. Wtedy istnieje $x_0 \in]a,b[$ takie, że $f'(x_0) = 0$

DOWÓD: Jeśli f jest stała na $[a,b]$ to $f'(x) = 0$ dla każdego punktu odcinka $]a,b[$. Dalej rozważamy przypadek f różnej od funkcji stałej. W takiej sytuacji istnieje $c \in]a,b[$ takie, że $f(c) \neq f(a) = f(b)$. Załóżmy, że $f(c) > f(a)$ (przypadek $f(c) < f(a)$ podobnie) Funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy więc istnieje $x_0 \in [a,b]$ takie, że $f(x_0) = \sup f$. $x_0 \in]a,b[$ gdyż $f(x_0) \geq f(c) > f(a) (= f(b))$. Zgodnie z poprzednim faktem $f'(x_0) = 0$ ∎

TWIERDZENIE LAGRANŻA: zwane także twierdzeniem o wartości średniej.
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągła i różniczkowalna na $[a,b]$. Wtedy istnieje $x_0 \in]a,b[$ takie, że $(f(b) - f(a)) = (b-a) f'(x)$

DOWÓD:



$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\varphi(a) = f(a) \qquad \varphi(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

φ spełnia założenia tw. Rolle'a. Mamy $x_0 \in]a,b[: \varphi'(x_0) = 0$

$$0 = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Jeśli jakiś odcinek drogi przejechałeś ze średnią prędkością 60 km/h to po drodze musiałeś w pewnej chwili jechać z prędkością 60 km/h $\blacksquare$

TWIERDZENIE: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągłe i różniczkowalne w $]a,b[$. Wtedy istnieje $x_0 \in]a,b[$ takie, że

$$[f(b)-f(a)]\,g'(x_0) = [g(b)-g(a)]\,f'(x)$$

DOWÓD:

$$\varphi(t) = [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a) &= f(b)g(a) - \cancel{f(a)g(a)} - g(b)f(a) + \cancel{g(a)f(a)} \\ \varphi(b) &= \cancel{f(b)g(b)} - f(a)g(b) - \cancel{g(b)f(b)} + g(a)f(b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

φ spełnia założenia tw. Rolle'a. Istnieje więc $x_0 \in]a,b[$ takie, że $\varphi'(x_0) = 0$. W tym punkcie

$$[f(b)-f(a)]\,g'(x_0) = [g(b)-g(a)]\,f'(x_0)$$

$\blacksquare$

WNIOSKI Z TW. LAGRANGE'A (przydatne do badania funkcji)

FAKT: Niech $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna

(1) jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in]a,b[$ to f rosnąca

(2) jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in]a,b[$ to f malejąca

(3) Jeśli $f'(x)=0$ dla $x \in]a,b[$ to f stała na $]a,b[$

DOWÓD

Weźmy $a < x_1 < x_2 < b$ zgodnie z tw. Lagrange'a istnieje $x \in]x_1, x_2[$ takie, że

$$f(x_2)-f(x_1) = \underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} f'(x)$$

jeśli $f'(x)>0$ to $f(x_2)-f(x_1)>0 \rightarrow f(x_2)>f(x_1)$

$f'(x)<0$ to $f(x_2)-f(x_1)<0 \rightarrow f(x_2)<f(x_1)$

$f'(x)=0$ to $f(x_2)-f(x_1)=0 \longrightarrow f(x_2)=f(x_1)$

x_1 i x_2 można wziąć dowolne, stąd (1), (2) i (3).

(przydatne do badania funkcji)

TWIERDZENIE Jeśli $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $]a,b[\setminus x_0$ i

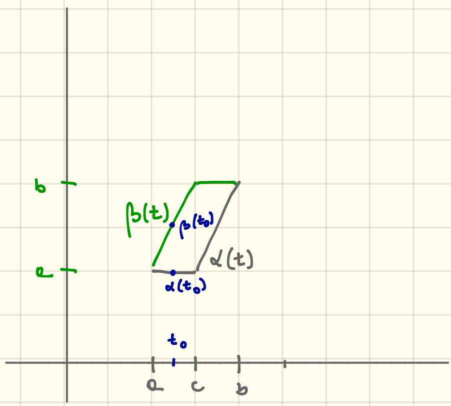
$f'(x)<0$ dla $x \in]a,x_0[$ $f'(x)>0$ dla $]x_0,b[$ wtedy f ma minimum w x_0

$f'(x)>0$ dla $x \in]a,x_0[$ $f'(x)<0$ dla $]x_0,b[$ wtedy f ma maksimum w x_0

TWIERDZENIE: (Własność Darboux dla pochodnych) $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $[a,b] \subset I$
f różniczkowalna. Dla każdego y pomiędzy $f'(a)$ i $f'(b)$ istnieje $x \in]a,b[$ takie że $f'(x)=y$.

DOWÓD:

Załóżmy, że $f'(a) < f'(b)$, tzn $f'(a) < y < f'(b)$.



$c = \frac{1}{2}(a+b)$ – środek odcinka $]a,b[$

$$\alpha(t) = \begin{cases} a & t \in [a,c] \\ 2t-b & t \in]c,b] \end{cases}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} 2t-a & t \in [a,c) \\ b & t \in]c,b] \end{cases}$$

Obie funkcje są ciągłe.

Ponadto $a \leq \alpha(t) < \beta(t) \leq b$ $\quad t \in]a,b[$ Zdefiniujmy

$$g:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R} \quad g(t) = \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t))}{\beta(t) - \alpha(t)}$$

$$\lim_{t \to a^+} g(t) = \lim_{t \to a^+} \frac{f(2t-a) - f(a)}{2t - a - a} = \lim_{t \to a^+} \frac{f(a + \overbrace{2(t-a)}^{h}) - f(a)}{\underbrace{2(t-a)}_{h}} = f'(a)$$

$$\lim_{t \to b^-} g(t) = \lim_{t \to b^-} \frac{f(b) - f(2t-b)}{b - 2t + b} = \lim_{t \to b^-} \frac{f(b + \overbrace{2(t-b)}^{h}) - f(b)}{\underbrace{2(t-b)}_{h}} = f'(b)$$

g jest ciągła na $]a,b[$. Na końcach przedziału połóżmy wartości $f'(a)$ i $f'(b)$ otrzymując funkcję ciągłą na $[a,b]$. Osiąga ona wszystkie wartości z przedziału $]f'(a), f'(b)[$ wewnątrz $]a,b[$, w szczególności istnieje t_0 : $g(t_0) = y$

Mamy $a \leq \underset{\substack{\Downarrow \\ x_1}}{\alpha(t_0)} < \underset{\substack{\Downarrow \\ x_2}}{\beta(t_0)} \leq b$

Korzystamy z tw. Lagrange'a : w odcinku $]x_0, y_0[$ istnieje x taki że

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(x)$$

tzn $\quad f'(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(\beta(t_0)) - f(\alpha(t_0))}{\beta(t_0) - \alpha(t_0)} = g(t_0) = y. \quad \blacksquare$

* VERTE $\rightarrow$

Inny dowód oparty na znikaniu pochodnej w ekstremum znajdą państwo w zielonym skrypcie.

PRZYKŁAD:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ $\leftarrow$ funkcja różniczkowalna

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ $\leftarrow$ funkcja nieciągła

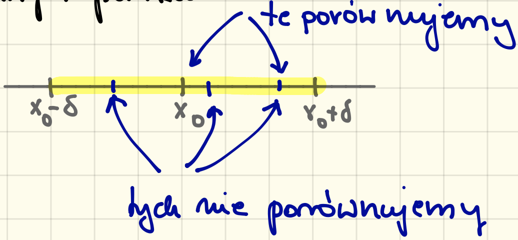
* KOMENTARZ

4a

Fakt, że pochodna funkcji, choć mająca własność Darboux nie musi być ciągła ma pewne konsekwencje. W szczególności fakt, że w pewnym punkcie pochodna jest dodatnia nie pociąga za sobą tego, że funkcja jest monotoniczna w otoczeniu tego punktu. Mamy za to następujący fakt:

FAKT: Niech f będzie jak zwykle i niech $f'(x_0)>0$ wtedy istnieje $\delta>0$ taka, że dla $0<h<\delta$ $f(x_0+h)>f(x_0)$ i $f(x_0-h)<f(x_0)$

UWAGA: To nie znaczy że f jest rosnąca na $]x_0-\delta, x_0+\delta[$. W treści twierdzenia jest mowa jedynie o porównywaniu wartości w otoczeniu z wartością w danym punkcie



DOWÓD: Z różniczkowalności mamy wzór

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+r(x_0,h)$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot h+r(x_0,h)$$

wiemy, że $\dfrac{r(x_0,h)}{h}\xrightarrow{h\to 0}0$ zatem istnieje $\delta>0$ taka

dodatnie

że dla $|h|<\delta$ $\left|\dfrac{r(x_0,h)}{h}\right|<f'(x_0)$

$$|r(x_0,h)|<f'(x_0)\cdot|h|$$

We wzorze

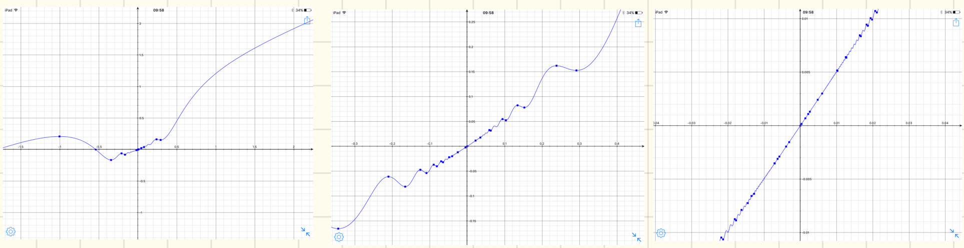
4b

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot h + r(x_0,h)$$

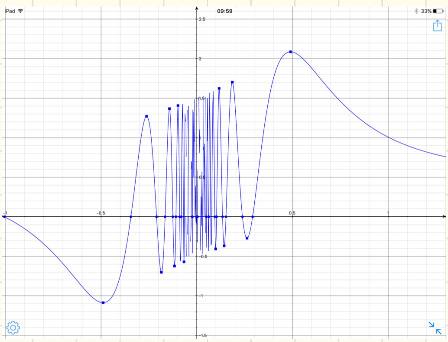
dla $h<\delta$ o znaku lewej strony decyduje znak wyrażenie na żółto, gdyż $r(x_0,h)$ jest na tyle małe, że nie może tego zmienić. Jeśli więc $h>0$ to przy dodatniej pochodnej lewa strona jest dodatnia jeśli $h<0$ to ujemne. ■

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2\sin^2\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} + 2x\sin^2\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ \frac{1}{2} & x=0 \end{cases}$$



funkcja f - różne skale



pochodna f'

Oczywiście, jeśli pochodna jest ciągła w x_0 takie rzeczy nie mogą mieć miejsca, ponieważ z dodatniości $f'(x_0)$ wynika wtedy dodatniość f' na pewnym otoczeniu x_0 i dalej, na mocy twierdzenia Lagrange'a monotoniczność funkcji f na tym otoczeniu.

4c

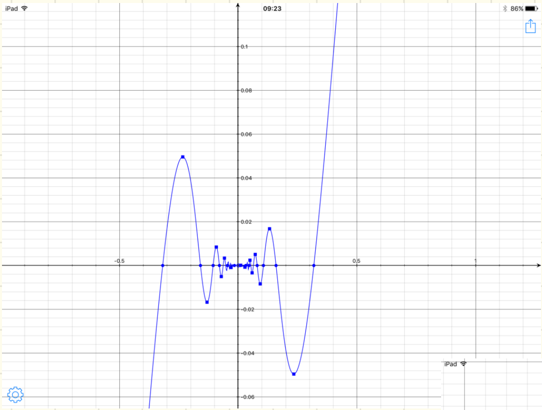
Ze względu na różne zachowanie funkcji, których pochodne są ciągłe i takich, których pochodne ciągłe nie są wyróżnia się dla odcinka $I \subset \mathbb{R}$ funkcje różniczkowalne, których pochodna jest ciągła. W skrócie nazywa się je różniczkowalne w sposób ciągły i zbiór tych funkcji oznacza się

$$C^1(I)$$

ewentualnie funkcje klasy C^1 na I

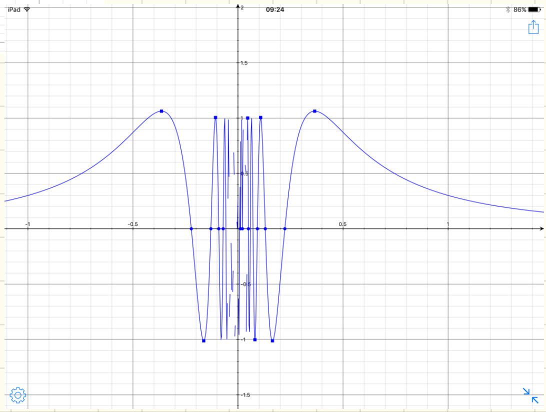
koniec dygresji

5



funkcja f

pochodna f



TWIERDZENIE (O RÓŻNICZKOWANIU FUNKCJI ODWROTNEJ)

Niech $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, której pochodna jest różna od zera dla wszystkich $x \in]a,b[$. Oznaczmy $I = f(]a,b[)$. Wtedy $f^{-1}: I \to]a,b[$ istnieje i jest różniczkowalna, ponadto

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

DOWÓD: Dyskutując własności funkcji ciągłych stwierdziliśmy, że obrazem odcinka w odwzorowaniu ciągłym z całą pewnością jest odcinek. I jest więc odcinkiem. Jeśli pochodna jest różna od zera na $]a,b[$ to w szczególności musi być stałego znaku. Gdyby bowiem istniały x_1, x_2 : $f'(x_1)\cdot f'(x_2) < 0$ to z własności Darboux pomiędzy x_1 i x_2 znaleźlibyśmy x_3 : $f'(x_3) = 0$. Jeden z poprzednich faktów stwierdza, że jeśli f' jest ujemna to f jest malejąca a jeśli f' dodatnia to f rosnąca.

W każdym wypadku f jest monotoniczne, jest więc injekcją. Obraz $I = f(]a,b[)$ jest odcinkiem otwartym $x =]c,d[$ przy czym każdy z końców może być nieskończony. Istnieje więc funkcja odwrotna $f^{-1}:]c,d[\longrightarrow]a,b[$.

6

Pozostaje wykazać różniczkowalność.

Weźmy $x \in]a,b[$, $y = f(x)$

było wcześniej

$$f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y) = k(h) \qquad f^{-1} \text{ jest funkcją ciągłą, więc } \lim_{h\to 0} k(h) = 0$$

$$f^{-1}(y+h) - x = k(h) \qquad f^{-1}(y+h) = x + k(h) \qquad \underset{f(x)}{y} + h = f(x+k(h))$$

$$\boxed{h = f(x+k(h)) - f(x)}$$

$$\frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \frac{k(h)}{h} = \frac{k(h)}{f(x+k(h)) - f(x)} \xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{f'(x)}$$

$$\downarrow h \to 0$$

$$(f^{-1})'(y)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad f'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

PRZYKŁAD:

Rozważmy $x \longmapsto \sin x$ dla $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\sin(x_0+h) = \sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h)$$

$$\frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = \sin(x_0)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0)\frac{\sin h}{h}$$

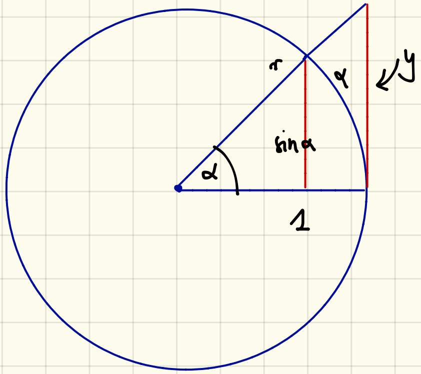
$$1 - \cos(h) = 2\sin^2\frac{h}{2}$$

$$\frac{1-\cos(h)}{h} = \frac{\sin^2\frac{h}{2}}{h/2} = \sin\frac{h}{2}\,\frac{\sin\frac{h}{2}}{h/2}$$

widać więc, że musimy umieć policzyć

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

zrobimy to metodami elementarnymi



$$\sin\alpha < \alpha < y$$

$$tg\alpha = \frac{y}{1} \to y = tg\alpha$$

$$\sin\alpha < \underbrace{\alpha < tg\alpha}_{\alpha\cos\alpha < \sin\alpha}$$

$$\alpha\cos\alpha < \sin\alpha < \alpha \quad /:\alpha$$

$$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$$

$$\alpha\to0^+ \downarrow$$

$$1 \leq \lim_{\alpha\to0^+}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \leq 1$$

$\lim\limits_{\alpha\to0^+}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ funkcja $\alpha\mapsto\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ jest symetryczna, tzn $\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$

zatem

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=0.$$

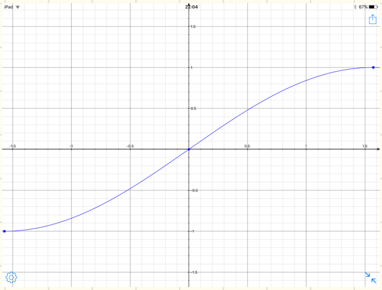
Wracamy do naszych rachunków

$$\underbrace{\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}}_{\xrightarrow{h\to0}\cos(x_0)} = -\sin(x_0)\underbrace{\sin\frac{h}{2}}_{\xrightarrow{h\to0}0}\underbrace{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\xrightarrow{h\to0}1} + \cos(x_0)\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\xrightarrow{h\to0}1}$$

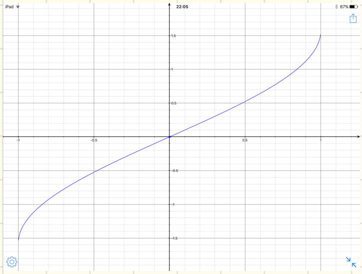
Wyprowadziliśmy wzór $\sin'(x)=\cos(x)$. Funkcja $x\mapsto\sin x$ na zbiorze $]-\pi/2,\pi/2[$ jest różniczkowalna i ma pochodną różną od 0 zatem istnieje funkcja odwrotna:

$$]-\pi/2,\pi/2[\ni x\mapsto\sin x\in]-1,1[\qquad]-1,1[\ni y\mapsto\arcsin y\in]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[$$

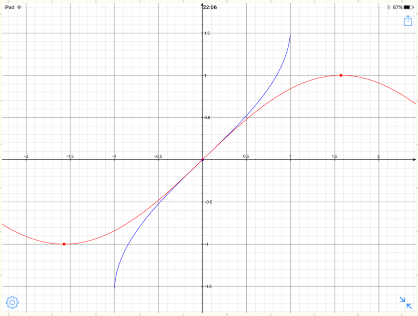
kawałek sinusa



arcus sinus



obydwa!



funkcja $y \longmapsto \arcsin y$ jest różniczkowalna

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'\big(\underbrace{\arcsin(y)}_{x}\big)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \sin^2\big(\arcsin(y)\big) = 1 - y^2$$

$$\cos x = \sqrt{1-y^2}$$

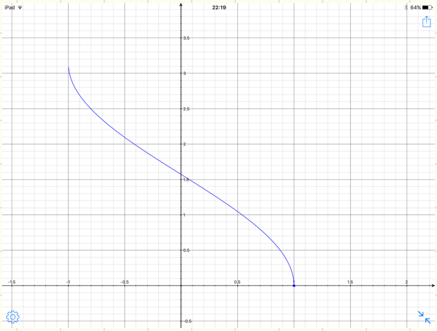
znak należy wziąć dodatni, gdyż dla x w interesującym nas odcinku $]-\pi/2, \pi/2[$ cosinus ma dodatnie wartości.

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Na ćwiczeniach wyprowadzę Państwu niektóre spośród poniższych wzorów:

$\arccos : \,]-1,1[\ni x \longmapsto \arccos(x) \in \,]0,\pi[$ $\qquad \arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

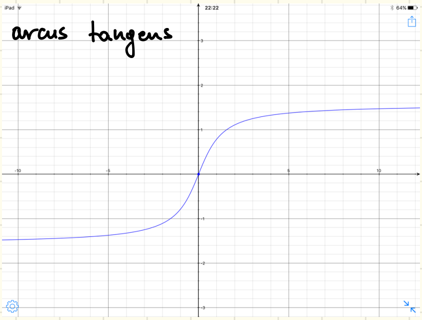
arcus cosinus



$tg: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ni x \longmapsto tg(x) \in \mathbb{R}$

$arctg: \mathbb{R} \ni x \longmapsto arctg\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

arcus tangens



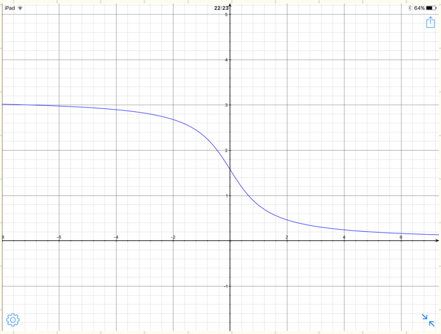
$$arctg'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$ctg: \left]0, \pi\right[\ni x \longmapsto ctg\, x \in \mathbb{R}$

$$arcctg\, x = \frac{\pi}{2} - arctg\, x$$

$$arcctg'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

arcus cotangens



oba