Reguła de l'Hospitala

Guillaume François Antoine markiz de l'Hospital
1661-1704

Autor pierwszego podręcznika rachunku różniczkowego

Analyse des Infiniment Petits pour
l'Intelligence des Lignes Courbes

Analiza nieskończenie małych [jako narzędzie do] zrozumienie linii krzywych

Johann Bernoulli
(1667-1748)

prawdziwy autor twierdzenia

Przypomnijmy definicję granicy $t \to a^+$ i $t \to b^-$

Niech $f: I \to \mathbb{R}$, $]a,b[\subset I$

$$\lim_{t\to a^+} f(t)=g \text{ jeśli } \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall t\in]a,a+\delta[\cap]a,b[\ |f(t)-g|<\varepsilon$$

$$\lim_{t\to b^-} f(t)=g \text{ jeśli } \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall t\in]b-\delta,b[\cap]a,b[\ |f(t)-g|<\varepsilon$$

Powyższe definicje można uogólnić na przypadek $g=+\infty$ i $g=-\infty$. Nie będziemy wypisywać precyzyjnie wszystkich przypadków. Zapiszemy przykład

$$\lim_{t\to a^+} f(t)=\infty \text{ jeśli } \forall R>0 \ \exists \delta>0 \ \forall t\in]a,a+\delta[\cap]a,b[\ f(t)>R$$

Można także dopuścić $a=-\infty$ i $b=+\infty$, np:

$\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=g$ jeśli $\forall \varepsilon>0\ \exists R>0:\ \forall t<-R\quad |f(t)-g|<\varepsilon$

Sądzę, że pozostałe kombinacje wartości granicy i brzegu zbioru potrafią Państwo uzupełnić sami

TWIERDZENIE I REGUŁA de l'Hospitala DLA ODCINKA

f, g różniczkowalne na $]a,b[$,
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=0=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)$, $g'(x)\neq 0$ dla $x\in]a,b[$

Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$ to istnieje $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ i obie granice są równe. $L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

DOWÓD Zdefiniujmy funkcje F, G na $[a,b[$ kładąc je równe f, g we wnętrzu i zero w punkcie a. Wtedy dla $x\in]a,b[$ F, G są ciągłe na $[a,x]$ i różniczkowalne na $]a,x[$ mamy więc wzór

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \quad \text{dla pewnego } \xi\in]a,x[$$

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} \Big\downarrow = \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \Big\downarrow = \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Ponieważ $x\longrightarrow a^+$ pociąga $\xi\longrightarrow a^+$ mamy

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\lim_{x\to a^+}\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\lim_{\xi\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=L$$

∎

Bardzo podobnie udowodnić można wersję reguły de l'Hospitala dla $a=-\infty$ i $b=+\infty$

TWIERDZENIE I REGUŁA de l'Hospitala $a=-\infty$, $b=+\infty$

Niech $f,g:]-\infty, c[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\left(f,g:]c,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \right)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} g(x), \quad g'(x) \neq 0 \text{ dla } x \in]-\infty, c[$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} g(x), \quad g'(x) \neq 0 \text{ dla } x \in]c, +\infty[\right)$$

Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \right)$

to istnieje $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\left(\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \right)$ i obie granice są równe.

DOWÓD: Dowód przeprowadzimy dla przypadku $t\to-\infty$. $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ oznacza, dla skończonego L, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje R: $\xi < R \Rightarrow$ (*) $\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| < \varepsilon$, tzn $L-\varepsilon \leq \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \leq L+\varepsilon$

Weźmy $x<y<R$ wtedy $\exists\, \xi \in]x,y[$ (tzn $\xi<R$)

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

iloraz pochodnych spełnia nierówność, iloraz różnic także

$$L-\varepsilon \leq \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} \leq L+\varepsilon$$

$$\Big\downarrow \; x\to-\infty, \quad f(x)\to 0, \; g(x)\to 0$$

$$L-\varepsilon \leq \frac{f(y)}{g(y)} \leq L+\varepsilon \Rightarrow \lim_{y\to-\infty} \frac{f(y)}{g(y)} = L. \quad \blacksquare$$

Wersja z $L = \pm\infty$ jest udowodnić równie łatwo zastępując warunek (*) odpowiednim warunkiem $\frac{f'(x)}{g'(x)} < M$ $\left(> M \right)$ dla $x < R$

TWIERDZENIE (II REGUŁA de L'Hospitala)

$f, g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalne, $a = -\infty$, $b = +\infty$ są dopuszczalne.

$\forall x \in]a,b[\; g'(x) \neq 0 \quad \lim_{x \to a^+} g'(x) = \infty \quad \left(\lim_{x \to b^-} g'(x) = \infty \right)$

Wtedy jeśli $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ to $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

DOWÓD: Początek dowodu jest podobny. Załóżmy, że $L \in \mathbb{R}$. Mamy dla $\varepsilon > 0$ liczbę δ taką że dla $\xi \in]a, a+\delta[$ $\quad L - \varepsilon \leqslant \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant L + \varepsilon$

Bierzemy $a < x < y < a+\delta$ i wybieramy $\xi \in]x, y[$

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{mamy więc}$$

$$\underbrace{L - \varepsilon < \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}}_{} < L + \varepsilon$$

mnożymy przez $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$

dla ustalonego y można wziąć x: $g(x) - g(y) > 0$

> 0

$$(L-\varepsilon)\frac{g(x)-g(y)}{g(x)} \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{g(x)} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} > (L-\varepsilon)\Big(1 - \underbrace{\frac{g(y)}{g(x)}}_{\downarrow\, x \to a^+ \; 0}\Big) + \underbrace{\frac{f(y)}{g(x)}}_{x \to a^+ \; \searrow 0}$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant L - \varepsilon$$

Podobnie druga nierówność

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)} \leqslant (L+\varepsilon)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant (L+\varepsilon)\Big(1 - \underbrace{\frac{g(y)}{g(x)}}_{\downarrow 0}\Big) + \underbrace{\frac{f(y)}{g(x)}}_{\downarrow 0}$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant L + \varepsilon$$

Wersja dla $L=\pm\infty$ robimy podobnie ■

Reguły de l'Hospitala ułatwiają życie. Umożliwiają liczenie rozmaitych skomplikowanych granic

(a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$

(ą) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\cos x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$

(ć) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(\sin x)-\sin^2(x)}{x^6}$

(ę) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$

(h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

(i) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+2\log x}{x}$

(j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$

(k) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\log x}\right)$

(l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$

(ł) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\log(1+x)}{x^2}\right)$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi x-1}{2x^2}-\dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right)$

(n) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

(ń) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

(o) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x}$

(ó) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$

(p) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{x}}$

(r) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[n]{x}\log^m x$

(s) $\lim\limits_{x\to \infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(ś) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\operatorname{ctg}(x-a)$

(t) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x=\lim_{x\to 0^+}\exp(x\log x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\log x}^{\to+\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to+\infty}}$$

$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ (tw. o różniczkowaniu f. odwrotnej)

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

zatem $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x=0$ i $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=1$.

Niektóre przykłady, np z dużą liczbą f. trygonometrycznych są trudne do liczenia tą metodą. Np

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^x-1)-e^{\sin x}+1}{\sin x\,\sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{x}{3}\,\sin\frac{x}{4}}$$

W takim przypadku lepiej posłużyć się rozwinięciami z użyciem wzoru Taylora

WYŻSZE POCHODNE I WZÓR TAYLORA

Wprowadziliśmy już pojęcie funkcji różniczkowalnej w sposób ciągły (klasy C^1). Może się zdarzyć, że funkcja pochodna jest nie tylko ciągła, ale i różniczkowalna. Pochodną pochodnej nazywamy drugą pochodną funkcji f i oznaczamy f'' lub $f^{(2)}$. Indukcyjnie definiujemy wyższe pochodne:

$$f^{(k)}(x)=f^{(k-1)'}(x)\qquad k\in\mathbb{N}$$

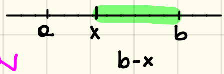
Funkcję różniczkowalną k-razy i taką, że k-ta pochodna jest ciągła na I nazywamy funkcją klasy C^k na I. Zbiór takich funkcji oznaczamy $C^k(I)$.
Funkcje które są nieskończenie wiele razy różniczkowalne na I nazywamy funkcjami gładkimi lub klasy C^∞. Zbiór takich funkcji oznaczamy $C^\infty(I)$.
Gładkie są wielomiany, exp, log, f. trygonometryczne. Na oko są to wszystkie funkcje, których używamy. Można pokazać jednak, że istnieją także funkcje skończonej klasy różniczkowalności. Np $f(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$ jest klasy C^1

$f'(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ 2x & x>0\end{cases}$ $f'(x)$ jest ciągła i nieróżniczkowalna w zerze

WZÓR TAYLORA: Okazuje się, że funkcje $f: I \to \mathbb{R}$ które są różniczkowalne n-razy można przybliżać wielomianem podobnie jak w definicji różniczkowalności przybliżamy f. afiniczną (wielomianem stopnia 1)

Weźmy $f: I \to \mathbb{R}$ klasy C^{n-1} na I. Niech ponadto $]a,b[\subset I$ i $f^{(n)}$ istnieje na $]a,b[$. Weźmy

$$\varphi(x)=f(b)-f(x)-\frac{b-x}{1}f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f^{(2)}(x)-\dots-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)$$



$$\varphi'(x)=\cancel{-f'(x)}+\cancel{f'(x)}-\cancel{\frac{(b-x)}{1}f''(x)}+\cancel{\frac{(b-x)}{1}}f^{(2)}(x)-\cancel{\frac{(b-x)^2}{2!}}f^{(3)}(x)-\dots+\cancel{\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x)}-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-2)!}f^{(n)}(x)$$

$$=-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)$$

Niech teraz $\Phi(x)=\varphi(x)-\frac{\varphi(a)}{(b-a)^k}(b-x)^k$ $\quad k\in\mathbb{N}$

$$\Phi(a)=\varphi(a)-\frac{\varphi(a)}{(b-a)^k}(b-a)^k=0 \qquad \Phi(b)=\varphi(b)=0$$

Φ spełnia założenia tw. Rolle'a więc $\exists\, \xi\in\,]a,b[\,: \Phi'(\xi)=0$

$$\Phi'(\xi)=\varphi'(\xi)+\frac{k\varphi(a)}{(b-a)^k}(b-\xi)^{k-1}=0$$

$$\Phi'(\xi)=\varphi'(\xi)+\frac{k\varphi(a)}{(b-a)^k}(b-\xi)^{k-1}=0$$

$$-\frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{k\varphi(a)}{(b-a)^k}(b-\xi)^{k-1}=\frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n}(\xi)$$

$$\varphi(a)=\frac{(b-a)^k(b-\xi)^{n-k}}{k(n-1)!}f^{n}(\xi)$$

$$f(b)-f(a)-\sum_{l=1}^{n-1}\frac{(b-a)^l}{l!}f^{(l)}(a)=\ldots=\frac{(b-a)^k(b-\xi)^{n-k}}{k(n-1)!}f^{n}(\xi)$$

$$f(b)=f(a)+\sum_{l=1}^{n-1}\frac{(b-a)^l}{l!}f^{(l)}(a)+\frac{(b-a)^k}{k(n-1)!}(b-\xi)^{n-k}f^{n}(\xi) \qquad \xi\in\,]a,b[$$

Zwyczajowe oznaczenia $a=x$ $b-a=h$ $b=x+h$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f^{(2)}(x)}{2!}h^2+\dots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1}+\underbrace{\frac{h^k}{k(n-1)!}(x+h-\xi)^{n-k}f^{n}(\xi)}_{R_{n-1}(x,h)}$$

TWIERDZENIE: $f\in C^{n-1}(I)$, $f^{(n)}$ istnieje na $]x,x+h[$ wtedy istnieje $\xi\in\,]x,x+h[$ takie, że

$$f(x+h)=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{h^l}{l!}f^{(l)}(x)+R_{n-1}(x,h)$$

Resztę $R_{n-1}(x,h)=\frac{h^k}{k(n-1)!}(x+h-\xi)^{n-k}f^{(n)}(\xi)$ nazywa się resztą w postaci Schlömlicha

Wybierając szczególne k dostajemy inne postacie reszty:

$k=n$ $\quad \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$ reszta w postaci Lagrange'a

$k=1$ $\quad \frac{h}{(n-1)!}(x+h-\xi)^{n-1}f^{(n)}(\xi)=\frac{h^n(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x+\vartheta h)$

$\xi\in\,]x,x+h[$ tzn $\xi=x+\vartheta h$ $\quad\vartheta\in\,]0,1[$

$x+h-x-\vartheta h=h(1-\vartheta)$

Reszta w postaci Cauchy'ego.