Zauważmy, że jeśli f^{n} istnieje w x możemy napisać

$$R_n(x,h) = f(x+h) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) \quad \text{i policzyć} \quad \lim_{h\to 0} \frac{R_n(x,h)}{h^n}$$

Ustalmy x i weźmy $\varphi(x) = R_n(x,h)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h^n} \overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{n h^{n-1}} \left(f'(x+h) - \left[f'(x) + h f''(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(3)}(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \right] \right) =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{n(n-1) h^{n-2}} \left(f''(x+h) - \left[f''(x) + h f^{(3)}(x) + \dots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n)}(x) \right] \right) \overset{H}{=} \dots \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{n!\, h} \left(f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)} x - h f^{(n)}(x) \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{n!} \left[\frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n)} x}{h} - f^{n}(x) \right] = 0$$

Oznacza to, że dla małych h przybliżenie funkcji przy pomocy wielomianu jest dobre, w szczególności może być użyte do liczenia granicy.

Będziemy pisać: $f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{m!} f^{n-1}(x) + \underbrace{\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + R_n(x,h)}$

Wyrazy rzędu n, tzn $\longrightarrow \Theta(n)$

$$\frac{\Theta(n)}{h^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \text{const.}$$

np $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \Theta(3) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Przybliżenie Taylora przydaje się do badania rodzajów punktów krytycznych funkcji. Przypomnijmy, że jeśli x_0 jest ekstremum f i $f'(x_0)$ istnieje to $f'(x_0) = 0$. Twierdzenie odwrotne (z zerowania się pochodnej wynika istnienie ekstremum) nie zachodzi ale oczywiście punkty w których $f'(x) = 0$ są podejrzane i zasługują na oddzielną nazwę punkty krytyczne.

Mamy za to następujące twierdzenie

TWIERDZENIE: $f: I \to \mathbb{R}$ (otwarty przedział) $x_0 \in I$ f różniczkowalna n razy, $f^{(n)}$ ciągła w x_0

Niech $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ wtedy

gdy $n = 2k+1$ f nie ma ekstremum w x_0

gdy $n = 2k$ f ma ekstremum w x_0; jeśli $f^{(n)}(x_0) > 0$ to x_0 jest lokalnym minimum, gdy $f(x_0) < 0$ to x_0 jest lokalnym maksimum.

DOWÓD:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + 0 + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\xi) \qquad \xi : |\xi| < |h|, \ \xi \text{ zależy od } h$$

z ciągłości $f^{(n)}$ w x_0 wnioskujemy, że dla małych ξ znak $f^{(n)}(x_0+\xi)$ jest taki sam jak znak $f^{(n)}(x_0)$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\xi)$$

Gdy $n = 2k+1$ prawa strona zmienia znak przy przejściu h przez zero.
Gdy $h = 2k$ prawa strona jest stałego znaku: dodatnia dla $f^{(n)}(x_0) > 0$ i ujemna dla $f^{(n)}(x_0) < 0$. Oznacza to, że $f(x_0+h) > f(x_0)$ dla $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\to$ x_0 jest minimum i $f(x_0+h) < f(x_0)$ dla $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\to$ x_0 jest maksimum ■

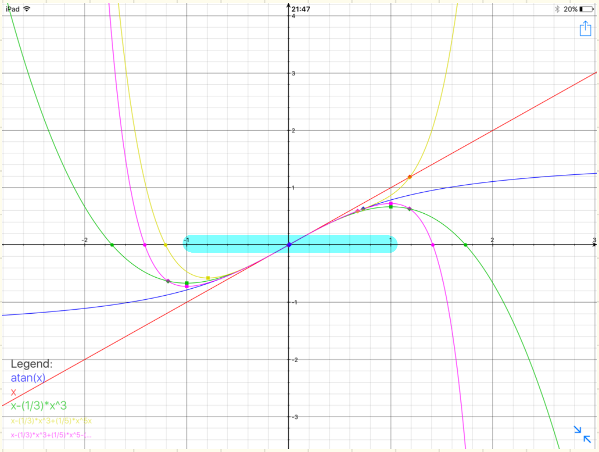
WAŻNA UWAGA: Własność reszty we wzorze Taylora, mianowicie $\frac{R_n(x,h)}{h^n} \xrightarrow{h \to 0} 0$ nie oznacza, że funkcja f jest w otoczeniu x zapisywana jako suma szeregu potęgowego czyli granica ciągu wielomianów. To by wymagało raczej zbadanie granicy $R_n(x,h) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ (dla pewnych h). O tym zaś nie ma mowy w powyższych twierdzeniach.

Są przykłady funkcji dla których reszta ma taką własność, ale są także przykłady dla których nie ma.

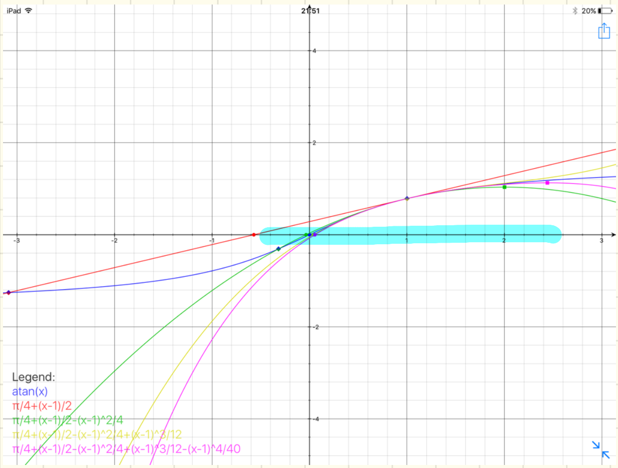
Funkcje dla której $\lim_{n\to\infty} R_n(x,h)$ znika dla pewnych h :

$x \longmapsto \operatorname{arctg} x$
rozwijamy w 0
$|h| < 1$

poza $]-1,1[$ przybliżenie przestaje być dobre

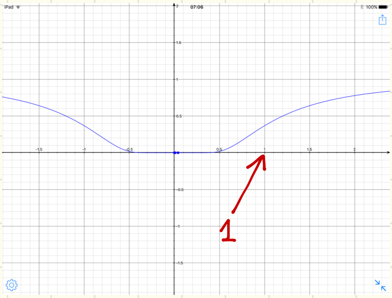


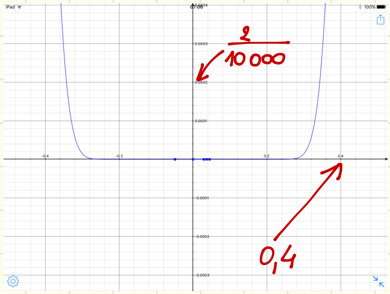
$x \longmapsto \operatorname{arctg} x$
rozwijamy w $x = 1$
$|h| < \sqrt{2}$



$$\frac{\pi}{4} + \sum_{0}^{\infty} \frac{(x-1)^n \sin\left(\frac{3\pi}{4} n\right)}{n(\sqrt{2})^n} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 - \frac{1}{40}(x-1)^5 + \cdots$$

funkcja $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ dla $x \neq 0$ i $0 \mapsto 0$ jest funkcją gładką. Wszystkie pochodne tej funkcji w $x_0 = 0$ są równe zero. Jednak funkcja jest dodatnia dla $x \neq 0$. Oznacza to, że cała funkcja jest resztą we wzorze Taylora. Na żadnym odcinku wokół zera reszta nie znika w granicy $n \to \infty$.





FUNKCJE PIERWOTNE

Jednym z bardziej istotnych elementów ćwiczeń rachunkowych z analizy I jest nauka technik poszukiwania funkcji pierwotnych:

DEFINICJA: Niech $f: I \to \mathbb{R}$. Funkcją pierwotną dla f nazywamy funkcję $F: I \to \mathbb{R}$ taką że $\forall\, x \in I \quad F'(x) = f(x)$.

Oczywiście nie dla każdej funkcji istnieje funkcja pierwotna. Wiemy już że funkcja, która jest pochodną musi spełniać własność Darboux. My ograniczać się będziemy do funkcji ciągłych. Prawdziwy jest fakt

FAKT: Jeśli $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ jest ciągła to istnieje dla niej funkcja pierwotna.

Fakt powyższy jest bezpośrednią konsekwencją podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego o którym mowa będzie później przy dyskutowaniu całki w sensie Riemanna.

Z twierdzenia Lagrange'a $\left(f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi) \right)$ wynika, że funkcja, której pochodna jest zero, jest stała na składowych spójności swojej dziedziny. Oznacza to, że funkcja pierwotna wyznaczona jest z dokładnością do stałej. Często rozpatrujemy funkcję określoną na niespójnym zbiorze, np $x \longmapsto \frac{1}{x}$ jest zdefiniowana na $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. Funkcja pierwotna do niej to $x \mapsto \log x + C_1$ na $]0,\infty[$ i $x \longmapsto \log(-x)+C_2$ na $]-\infty,0[$. Tradycyjnie piszemy $x \longmapsto \log|x|+C$ pamiętając jednak że stała może być różna na składowych spójności.

Tradycyjna notacja: Jeśli F jest funkcją pierwotną dla f piszemy

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

Funkcję pierwotną nazywamy także całką nieoznaczoną. Tradycyjna notacja pochodzi od związków funkcji pierwotnej z całką Riemanna. Jest wygodna przy praktycznym poszukiwaniu funkcji pierwotnych.

Poszukiwanie funkcji pierwotnych polega w dużym stopniu na zgadywaniu i nabywaniu doświadczenia. Oczywiście dla prostych funkcji zgadnąć nietrudno:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad n\in\mathbb{N}, \quad \text{ogólniej} \quad \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad \alpha\neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \dots \text{itd}$$

W bardziej skomplikowanych przypadkach stosować można dwie podstawowe techniki: całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie.

CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

Mamy wzór $(f\cdot g)' = f'g + g'f$ tzn $f'g = (f\cdot g)' - g'f$

zatem $\int \underbrace{f'(x)g(x)}\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$

Funkcję podcałkową musimy przedstawić jako iloczyn funkcji i pochodnej.

Przykład:

$$\int x e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

$f(x) = x \quad g'(x) = e^x$

$f'(x) = 1 \quad g(x) = e^x$

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = $$

$f(x) = \log x \quad g'(x) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = x$

$$= x\log x - x + C$$

CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE

Technika wynikająca ze wzoru $f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$. W funkcji, którą mamy do całkowania należy „rozpoznać" pochodną złożenia funkcji

$$\int f'(y(x))\,y'(x)\,dx = f(y(x)) + C$$

Przykład: $\int \operatorname{tg} x\,dx \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(-\sin x)}{\cos x}\,dx =$$

$f'(y) = \frac{1}{y} \quad y(x) = \cos x \quad y'(x) = -\sin x \quad f'(y(x)) = \frac{1}{\cos x}$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \log|y| + C = f(y)$

$$= -\int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{f'(y(x))}\,\overbrace{\cos'(x)}^{y'(x)}\,dx = \log|\cos(x)| + C = \log\cos x + C$$

dla $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Tradycyjne notacje:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{dy}{y} = \log|y| + c = \log|\cos x| + c$$

$-dy$

$y = \cos x$

$dy = -\sin x\,dx$