Rozróżniamy jeszcze zbiory skończone od zbiorów nieskończonych:

DEFINICJA Zbiór X jest nieskończony jeśli istnieje właściwy podzbiór $A \subset X$ równoliczny ze zbiorem X. Podzbiór „właściwy" oznacza, że $\exists x \in X : x \notin A$. Pozostałe zbiory nazywamy zbiorami skończonymi.

DEFINICJA Mówimy, że zbiór X jest <u>mniej liczny</u> od Y jeśli istnieje injekcja $X \to Y$ i zbiory X i Y nie są równoliczne (zdefiniować „nie bardziej liczny?"

PRZYKŁADY

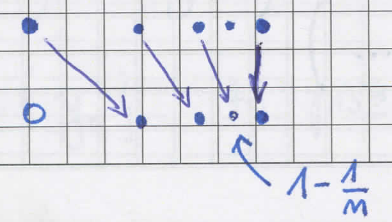
(1) Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest nieskończony. Istotnie, istnieje podzbiór $P \subset \mathbb{N}$ liczb parzystych

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Szukana bijekcja

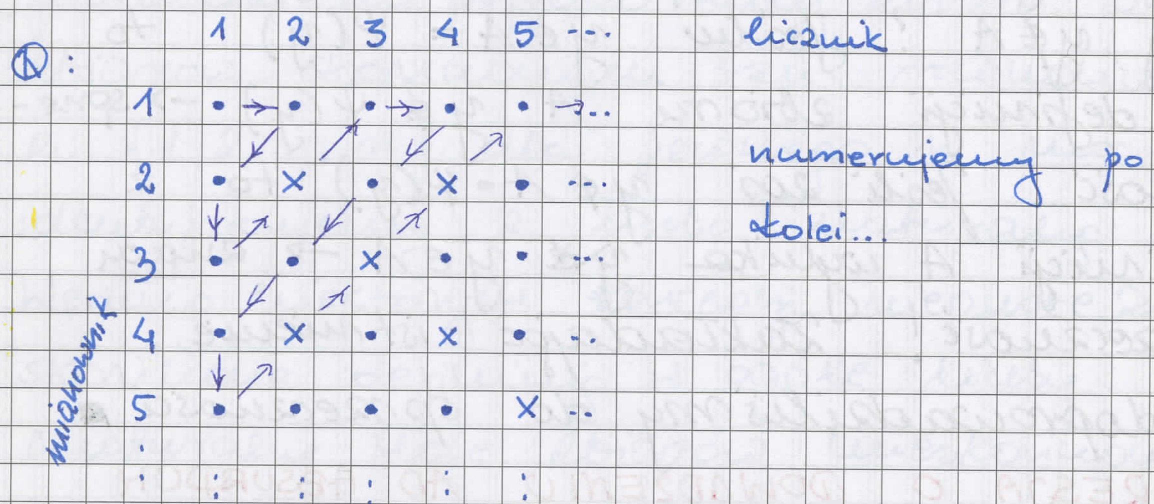
$P = \{2, 4, 6, \ldots\}$ $b_1 : \mathbb{N} \to P$ $b(n) = 2n$

(2) Odcinek $[0,1] \subset \mathbb{R}$ jest równoliczny z odcinkiem $]0,1]$

b_2:



(3) Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$



TWIERDZENIE (Cantora) dla dowolnego zbioru X zachodzi

zbiór X jest mniej liczny niż zbiór 2^X

DOWÓD: Wskazujemy injekcję $\varphi: X \to 2^X$

$$\varphi(x) = \{x\}$$

Dla dowodu stwierdzenia należy wykazać jeszcze, że X i 2^X nie są równoliczne. Załóżmy, że są, tzn., że istnieje bijekcję $\psi: X \to 2^X$. Przy pomocy tej bijekcji zdefiniujmy zbiór

$$A = \{x \in X : x \notin \psi(x)\}$$

A składa się z elementów zbioru X, zatem jest podzbiorem: $A \subset X$. Inaczej $A \in 2^X$ ⊕

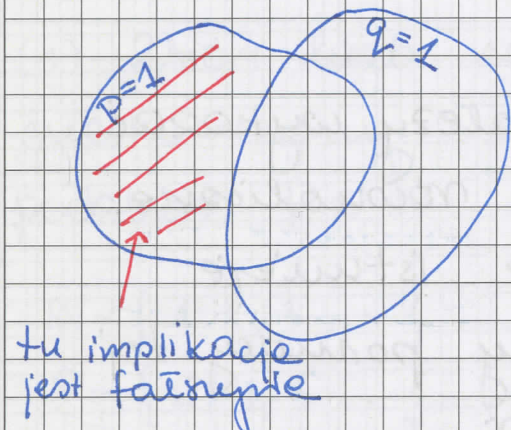
wobec tego $\exists y \in X : \Psi(y) = A$
Powstaje zatem pytanie czy $y \in A$ czy $y \notin A$? Jeśli $y \in A = \Psi(y)$ to z definicji zbioru A $y \notin \Psi(y)$ → sprzeczność. Jeśli zaś $y \notin A = \Psi(y)$ to z definicji A wynika ~~$y \notin$~~ $y \in A$ → znowu sprzeczność! Zakładając istnienie Ψ doprowadziliśmy do sprzeczności ■

DYGRESJA O DOWODZENIU AD ABSURDUM

Metoda „ad absurdum" dotyczy dowodzenia prawdziwości implikacji

$$p \Rightarrow q$$

p	q	p ⇒ q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



dowodzenie a.a „polega na wykazaniu, że obszar $p=1$ $q=0$ jest pusty"

Moc zbioru Analizowanie pojęcia ~~mocy~~ ~~zbio~~ równoliczności oraz mniejszości zbioru prowadzi do pojęcia mocy zbioru. Dla zbiorów skończonych, tzn równolicznych z $\{1, 2, \ldots, n\}$ dla pewnego n moc zbioru identyfikujemy z liczbą naturalną n. Według niektórych koncepcji niepuste zbiory skończone definiują w ogóle liczby naturalne. Moce zbiorów nieskończonych to tak zwane liczby kardynalne.

Np moc $\mathbb{N}$ – pierwsza nieskończona liczba kardynalna $\aleph_0$ (alef-zero)

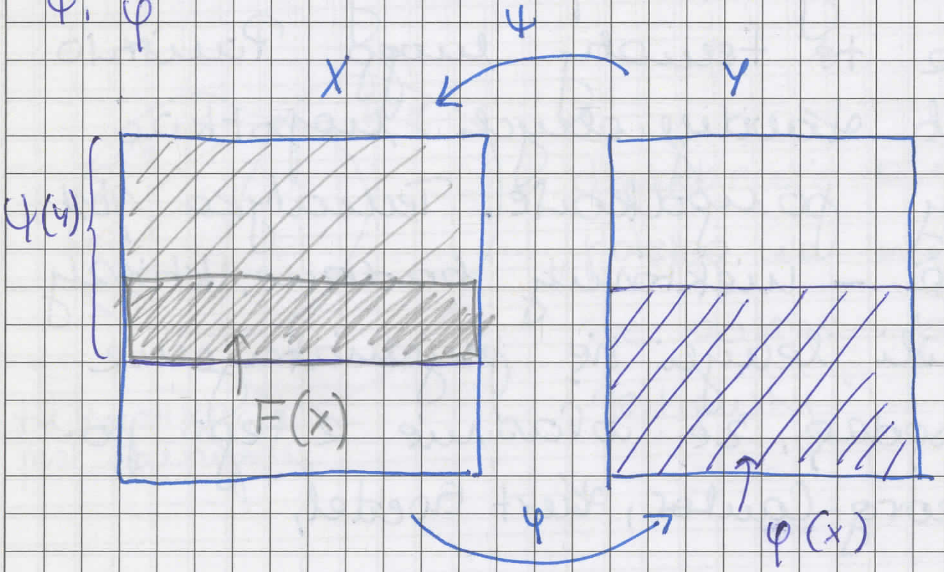
Zbiory skończone lub mocy alef-zero nazywają się przeliczalne. Do zbiorów nieprzeliczalnych dojdziemy wkrótce. Czytając na te tematy mogą Państwo oprócz liczb kardynalnych napotkać także liczby porządkowe. Tematyka jest dość odlotowa – niektórzy badacze, którzy się jej poświęcili leczyli się psychiatrycznie (niektórzy sądzą, że właśnie z tego powodu) Georg Cantor, Kurt Goedel,

Z powodów praktycznych sprawdzanie równoliczności zbiorów przy pomocy bijekcji jest często kłopotliwe, tzn. kłopotliwe jest konstruowanie bijekcji.
Przydatne jest wówczas twierdzenie!

TWIERDZENIE (Schrödera - Bernsteina)
Niech X, Y będą zbiorami, wówczas jeśli istnieją injekcje

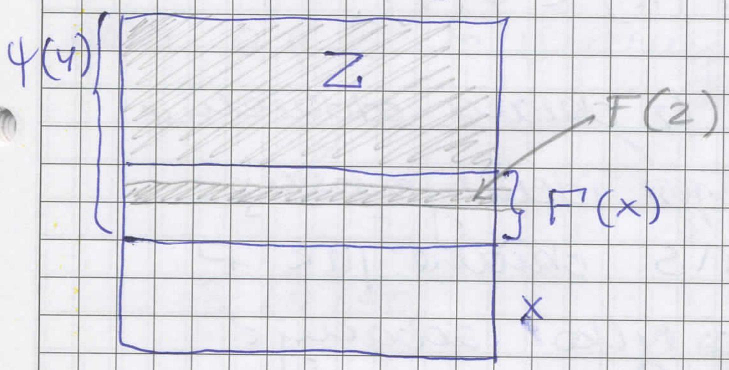
$\varphi : X \to Y$
$\psi : Y \to X$ to istnieje bijekcja $\theta : X \to Y$

DOWÓD:
Mamy dwa zbiory X i Y oraz dwa odwzorowania ψ i φ



Oznaczamy $F = \psi \circ \varphi$ $\quad F : X \to X$ $\quad F$ jest injekcją jako złożenie dwóch injekcji

Zbiory Y i $\Psi(Y)$ są równoliczne, gdyż odwzorowanie Ψ, jeśli obciąć mu przeciwdziedzinę jest bijekcją. Żeby pokazać bijektywność X i Y można zatem pokazać bijektywność X i $\Psi(Y)$.
Skonstruujemy odpowiednią bijekcję.



Definiujemy $Z = \Psi(Y) \setminus F(X)$

Badamy $F(Z)$: naturalnie $F(Z) \subset F(X)$ gdyż $Z \subset X$. Dalej $F^2(Z)$ także zawarte jest w $F(X)$ itd.

Definiujemy $S = Z \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(Z)$

Niech

$G: X \to \Psi(Y)$ będzie dane wzorem

$$G(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in S \\ F(x) & \text{dla } x \notin S \end{cases}$$

F1. 18

G jest szukaną bijekcją.

(1) $G(X) \subseteq Y(Y)$

istotnie, zbiór S na którym G jest identycznością jest zawarty w $Y(Y)$ natomiast dla pozostałych $G \times G$ działa jak F a $F(x) \subseteq Y(Y)$.

(2) G jest injekcją: G działa oddzielnie na S i $X \setminus S$. Na S jest identycznością a więc injekcją na $X \setminus S$ działa jak F. F jest injekcją. Trzeba tylko zobaczyć że jeśli $x \in S$ ~~to~~ i $y \in X \setminus S$ to nie może być $G(y) = G(x)$

$$\underset{F(y)}{G(y)} = \underset{x}{G(x)}$$

czy może być $F(y) \in S$?

$F(y) \in Z \to$ ale $Z = G(Y) \setminus F(X)$

niemożliwe

$F(y) \in F^k(Z)$

$y \in F^{k-1}(Z)$ ale wtedy $y \in S$

niemożliwe

zatem G jest injekcją

(3) Pokazać, że G jest "na" czyli surjekcją

Musimy dla każdego $a \in \psi(Y)$ znaleźć przeciwobraz przy odwzorowaniu G.

$\psi(Y) = Z_1 \cup F(X)$

jeśli $a \in Z_1$ to $a \in S$ i $G(a) = a$ zatem także $G^{-1}(a) = a$

jeśli $a \notin Z_1$ to mamy dwie możliwości

$a \in S$

$G^{-1}(a) = a$

$a \notin S$

$a \in F'(X)$

wtedy $\exists x : a = F'(x)$

czyli przeciwobraz istnieje.

III

Dowód jest dość długi i skomplikowany.
Zobaczmy więc przykład:

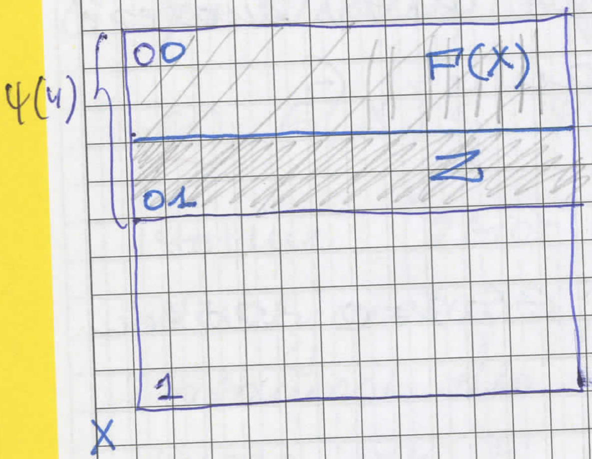
$X = Y$ = ciągi o wyrazach $\{0, 1\}$

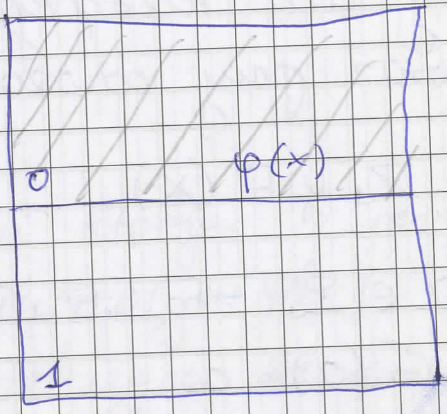
$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad \varphi((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$

$\psi = \varphi$

Skonstruujmy bijekcję G.

EN 20





$Z = \{(0,1,x_3,x_4 \dots)\}$

$F(Z) = \{(0,0,0,1,x_5,x_6 \dots\}$

$F^2(Z) = \{(0,0,0,0,0,1,\dots\}$

$S = Z \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^n(Z) =$ ciągi mające nieparzystą liczbę zer na początku.

$X \setminus Z$ ciągi zaczynające się od 1 lub od parzystej liczby zer

$G: X \longrightarrow \psi(Y)$

$G((\underbrace{0,\dots,0}_{2k+1},1,\dots)) = (0,\dots,0,1\dots)$

$G(\underbrace{0,\dots,0}_{2k},1\ )) = (\underbrace{0,\dots,0}_{2k+2},1\dots)$

Jeśli chcę mieć bijekcję z X do Y muszę złożyć G z ψ^{-1} obcięte do $\psi(Y)$.
ψ^{-1} obcina jedno zero

$$(\underbrace{0,0,0,}_{2k+1}1\ldots) \longmapsto (\underbrace{0,\ldots,0,}_{2k}1)$$

$$(\underbrace{0,0,\ldots 0,}_{2k}1\ldots) \longmapsto (\underbrace{0,\ldots,0,}_{2k+1}1\ldots)$$

nieparzystemu obcina jedno zero a parzystemu dodaje jedno zero.

Powracamy do nieco mniej skomplikowanych zagadnień: wprowadziliśmy pojęcie relacji oraz wyróżniliśmy szczególne relacje zwane odwzorowaniami. Teraz pora na zupełnie inny rodzaj relacji. Definiujemy relację równoważności:

DEFINICJA Relację równoważności w zbiorze X nazywamy relację R spełniającą trzy poniższe własności:

(1) relacja jest zwrotna tzn $\forall_x \ (x,x)\in R$

(2) relacja jest symetryczna tzn

$$\forall (x,y)\in X \quad (x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$$

(3) relacja jest przechodnia tzn.