DWA SŁOWA NA TEMAT dx

Rachunek różniczkowy poznajemy, naturalnie, zaczynając od funkcji jednej zmiennej. W dalszej kolejności uczymy się różniczkować bardziej skomplikowane odwzorowania. Są to na przykład funkcje wielu zmiennych $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Przypadek $n=1$ jest zdecydowanie wyjątkowy. Jedynie dla $n=1$ pochodna jest takim samym bytem matematycznym jak wyjściowe funkcje. Bierzemy funkcję, różniczkujemy jeśli się da i dostajemy znowu funkcję. Dla funkcji, powiedzmy, dwóch zmiennych już tak nie jest. Popatrzmy:

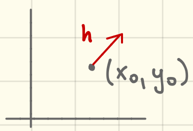
Definicja pochodnej funkcji jednej zmiennej w punkcie t_0:

$$f(t_0+h) = f(t_0) + f'(t_0)\cdot h + r(t_0, h)$$

Spróbujmy to samo napisać dla $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x_0+h_x, y_0+h_y) = g(x_0,y_0) + g'(x_0,y_0)\underset{\uparrow}{h} + r(x_0,y_0,h_x,h_y)$$

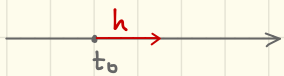
$$h = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}$$



Idea jest więc ta sama, tzn przybliżamy funkcję w otoczeniu punktu, ale żeby można było to zrobić potrzebujemy nie jednej liczby $f'(t_0)$ tylko liniowego odwzorowania na przyrostach argumentu w danym punkcie. Dla $n=2$ takie odwzorowanie zadane jest przez dwie liczby $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$

$$g'(x_0,y_0) = \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\right] \qquad g'(x_0,y_0)\cdot h = \frac{\partial g}{\partial x} h_x + \frac{\partial g}{\partial y} h_y$$

Oczywiście przypadek z $n=1$ też można tak zrozumieć: $f'(x_0)$ to odwzorowanie liniowe na jednowymiarowej przestrzeni wektorowej przyrostów w punkcie t_0



Do opisania odwzorowania liniowego na jednowymiarowej przestrzeni wystarczy jedna liczba. Na dwuwymiarowej potrzebne są dwie, na n wymiarowej - n liczb. Kiedy pozbieramy wartości pochodnych punkt po punkcie w przypadku jednowymiarowym rezultat 2 możemy opisać znowu jako funkcję $t \mapsto f'(t)$. W przypadku dwuwymiarowym $(x,y) \longmapsto g'(x,y)$ to już nie jest funkcja. Gdyby się uprzeć można by powiedzieć że to dwie funkcje. Bardziej ogólnie i poprawnie koncepcyjnie jest powiedzieć, że wartością odwzorowania g' w punkcie (x,y) jest odwzorowanie liniowe na przestrzeni przyrostów. Taki obiekt (odwzorowanie o wartościach w odwzorowaniach liniowych) nazywa się *formą różniczkową*. Zauważmy teraz że na $\mathbb{R}^2$ w każdym ustalonym punkcie mamy dwa wyróżnione odwzorowania liniowe na przestrzeni przyrostów:

$\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} \longmapsto h_x$ i $\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} \longmapsto h_y$. Można je zapisać przy pomocy wektora wierszowego $[1\ \ 0]\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} = h_x$ $\quad [0\ \ 1]\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} = h_y$ (mnożymy jak macierze). Używa się także innego oznaczenia: Pierwsze odwzorowanie to dx, drugie to dy. Nasza pochodna w punkcie (x,y) to zatem

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy.$$

Przy takich oznaczeniach zamiast g' piszemy dg

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy.$$

forma różniczkowa - różniczka funkcji

Oczywiście w jednym wymiarze też można to robić. Mamy w każdym punkcie $t \in \mathbb{R}$ jedno wyróżnione odwzorowanie liniowe $h \mapsto h$, każde inne jest proporcjonalne do niego. to wyróżnione nazywamy dt. Różniczka funkcji to wtedy

$$df = f'(t)\,dt$$

Skoro różniczka funkcji jest formą to poszukuje się funkcji pierwotnej dla formy, a więc obiektu typu $\alpha(t)\,dt$. Stąd napis

$\int \alpha(t)dt$ a nie $\int \alpha$ ten napis ma inny sens o którym za chwilę.

3

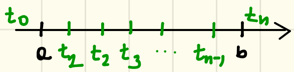
Znane wzory w wersji na formach mają postać

$$d(fg)(t) = f(t)dg(t) + g(t)df(t) = f(t)g'(t)dt + g(t)f'(t)dt =$$
$$= \left(f(t)g'(t) + g(t)f'(t)\right)dt$$ → do całkowanie przez części

$$d(f\circ g)(t) = f'(g(t))dg(t) = f'(g(t))g'(t)dt$$ → do całkowanie przez podstawienie.

CAŁKA RIEMANNA

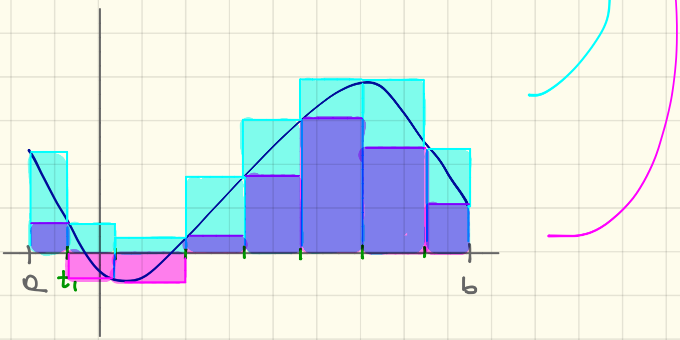
DEFINICJA: Podziałem przedziału $[a,b]\subset\mathbb{R}$ nazywamy podzbiór $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset [a,b]$ taki, że $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$



Niech $f:[a,b]$ będzie ograniczona. Definiujemy

sumę dolną $$\underline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{[t_{i-1},t_i]} f\right)(t_i - t_{i-1})$$

sumę górną $$\overline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[t_{i-1},t_i]} f\right)(t_i - t_{i-1})$$



Jest raczej oczywiste, że

$$(\inf f)(b-a) \leq \underline{S}(f,\pi) \leq \overline{S}(f,\pi) \leq (\sup f)(b-a)$$

Dla ustalonego f zbiory wartości odwzorowań $\pi \longmapsto \underline{S}(f,\pi)$ i $\pi \longmapsto \overline{S}(f,\pi)$ są ograniczone. Istnieją zatem

$$\underline{\int}_{[a,b]} f = \sup_{\pi} \underline{S}(f,\pi) \qquad \overline{\int}_{[a,b]} f = \inf \overline{S}(f,\pi)$$

DEFINICJA: Funkcję $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy całkowalną w sensie Riemanna na $[a,b]$ jeśli $\underline{\int}_{[a,b]} f = \overline{\int}_{[a,b]} f$

Wspólną wartość całki górnej i dolnej oznaczamy wówczas $\int_{[a,b]} f$ i nazywamy całką Riemanna z f po odcinku $[a,b]$. (W skrócie mówimy też całka z f od a do b, całka oznaczona z f...)

Oznaczenie $\int_{[a,b]} f$ jest prawdopodobnie najbardziej poprawne, jednak używa się powszechnie oznaczeń $\int_a^b f$, $\int_a^b f(x)dx$ przyjmując konwencję $\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Zanim policzymy z definicji jakąś całkę:

DEFINICJA: Podział π' jest drobniejszy niż π jeśli $\pi \subset \pi'$

Jest dość oczywiste, że jeśli π' drobniejszy niż π to

$$\underline{S}(f,\pi) \leq \underline{S}(f,\pi') \leq \overline{S}(f,\pi') \leq \overline{S}(f,\pi)$$

Dla dwóch dowolnych podziałów π, π' istnieje zawsze drobniejszy od nich podział π'', np $\pi'' = \pi \cup \pi'$

FAKT: f jest całkowalna w sensie Riemanna jeśli $\forall \varepsilon>0 \ \exists \pi$:

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$

DOWÓD: $\Leftarrow$ Ustalmy $\varepsilon>0$ i weźmy π taki jak w treści twierdzenia. Z nierówności

$$\underline{S}(f,\pi) \leq \underline{\int}_{[a,b]} f \leq \overline{\int}_{[a,b]} f \leq \overline{S}(f,\pi)$$

wynika, że także $\overline{\int}_{[a,b]} f - \underline{\int}_{[a,b]} f < \varepsilon$ co dowodzi całkowalności f.

$\Rightarrow$ Niech f będzie całkowalna na $[a,b]$ oznacza to że $\underline{\int}_{[a,b]} f = \overline{\int}_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f$.
Z definicji $\underline{\int}$ i $\overline{\int}$ dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieją podziały $\underline{\pi}$ i $\overline{\pi}$ takie, że

$$\underline{\int}_{[a,b]} f - \underline{S}(f,\underline{\pi}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad \overline{S}(f,\overline{\pi}) - \overline{\int}_{[a,b]} f < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weźmy π drobniejszy od $\underline{\pi}$ i $\overline{\pi}$. Wtedy mamy

$$\underline{\int}_{[a,b]} f - \underline{S}(f,\pi) < \underline{\int}_{[a,b]} f - \underline{S}(f,\underline{\pi}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i}$$

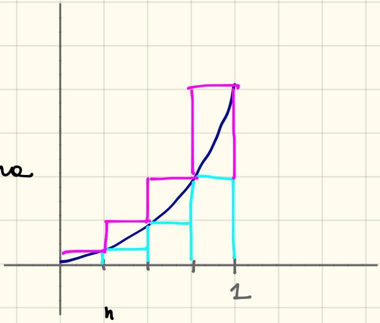
$$+ \quad \overline{S}(f,\pi) - \overline{\int}_{[a,b]} f < \overline{S}(\overline{\pi},f) - \overline{\int}_{[a,b]} f < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overline{S}(f,\pi) - \cancel{\overline{\int}_{[a,b]} f} + \cancel{\underline{\int}_{[a,b]} f} - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon \quad \Rightarrow \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$

∎

PRZYKŁAD: Zanim zagłębimy się dalej w rozważanie teoretyczne policzmy jakąś całkę z definicji.

$f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}\qquad f(t)=t^2$



Rozważmy podział π_n odcinka $[0,1]$ na n równych części:

$t_0=0\quad t_1=\frac{1}{n}\quad\dots\quad t_{n-1}=\frac{n-1}{n}\quad t_n=1$

Suma dolna

$$\underline{S}(f,\pi_n)=\sum_{i=1}^{n} f(i-1)\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{1}{n^3}\left(1+2^2+\dots+(n-1)^2\right)$$

Suma górna

$$\overline{S}(f,\pi_n)=\sum_{i=1}^{n} f(i)\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}=\frac{1}{n^3}\left(1+2^2+\dots+n^2\right)$$

Policzmy $\overline{S}(f,\pi_n)-\underline{S}(f,\pi_n)=\frac{1}{n^3}n^2=\frac{1}{n}$ Oczywiście $\forall\varepsilon>0\ \exists n$ taki, że $\frac{1}{n}<\varepsilon$

wobec tego $\exists\pi_n:\ \overline{S}(\dots)-\underline{S}(\dots)<\varepsilon$

Funkcja f jest więc całkowalna na $[0,1]$. Żeby znaleźć wartość całki wystarczy wyznaczyć $\int_{[0,1]} f$ a to możemy zrobić licząc

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,\pi_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\underbrace{\left(1+2^2+\dots+n^2\right)}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

To można wyprowadzić!

$\sum_{i=0}^{n} i^3=0+1+2^3+\dots+n^3=A\qquad B-A=(n+1)^3$

$\sum_{i=0}^{n}(i+1)^3=1^3+2^3+\dots+(n+1)^3=B$

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1)^3-i^3=\sum_{i=0}^{n}\left[(i+1)-i\right]\left[(i+1)^2+(i+1)i+i^2\right]=\sum\left(i^2+2i+1+i^2+i+i^2\right)$$

$$=3\sum_{i=0}^{n}i^2+3\sum_{i=0}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1$$

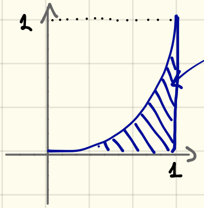
$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+\cancel{1}=3\sum_{i=1}^{n}i^2+3\sum_{i=1}^{n}i+n+\cancel{1}$$

$$3\sum_{1}^{n}i^2=n^3+3n^2+3n-3\frac{n(n+1)}{2}-n\qquad 6\sum_{1}^{n}i^2=2n^3+6n^2+6n-3n^2-3n-2n=$$

$$=2n^3+3n^2+n=n(2n^2+3n+1)=n(2n+1)(n+1)$$

7

$$\int_{[0,1]} t^2 dt = \overline{\int_{[0,1]}} f = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,\pi_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n+1)(n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = 1/3$$



Oczywiście taki sposób całkowania sprawdza się być może numerycznie, ale analitycznie potrzebujemy bardziej efektywnych metod.

CO BĘDZIEMY ROBIĆ DALEJ:

Jakie funkcje są całkowalne w sensie Riemanna
CEL: Opisać $R([a,b])$
zbiór funkcji całkowalnych w sensie Riemanna na odcinku

Własności całki, przydatne twierdzenie

te tematy nie są rozłączne oczywiście

Podstawowe tw. rach. różn. i całkowego.

FAKT 1: Niech $f,g \in R([a,b])$. Wtedy dla $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ funkcja $\alpha f + \beta g$ też jest całkowalna na $[a,b]$

DOWÓD: Dla $\lambda > 0$, całkowalnej funkcji f i odcinka $[c,d] \subset [a,b]$ mamy $\sup_{[c,d]} (\lambda f)(t) = \lambda \sup_{[c,d]} f(t)$ i $\inf_{[c,d]} (\lambda f)(t) = \lambda \inf_{[c,d]} f(t)$. Zatem $\underline{S}(\lambda f,\pi) = \lambda \underline{S}(f,\pi)$, podobnie $\overline{S}(\lambda f,\pi) = \lambda \overline{S}(f,\pi)$. Dalej $\underline{\int}_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \underline{\int}_{[a,b]} f$ i $\overline{\int}_{[a,b]} \lambda f = \lambda \overline{\int}_{[a,b]} f$ i co za tym idzie $\int_{[a,b]} \lambda f = \lambda \int_{[a,b]} f$

Dla $\lambda < 0$ mamy podobnie, tyle że sup zamienia się z inf, $\underline{S}$ z $\overline{S}$ i $\underline{\int}$ z $\overline{\int}$. Nadal jednak $\int_{[a,b]} \lambda f = \lambda \int_{[a,b]} f$ (*)

Dalej weźmy $f+g$. Skoro $f \in R([a,b])$, $g \in R([a,b])$ to dla ustalonego $\varepsilon > 0$ $\exists\, \pi_g$ i π_f: 8

$$\overline{S}(f,\pi_f) - \underline{S}(f,\pi_f) < \varepsilon/2, \quad \overline{S}(g,\pi_g) - \underline{S}(g,\pi_g) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Bierzemy π drobniejszy niż π_f i π_g. Powyższe nierówności obowiązują dla π

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon/2, \quad \overline{S}(g,\pi) - \underline{S}(g,\pi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla $[c,d] \subset [a,b]$ mamy

$$\sup_{[c,d]}(f+g) \leq \sup_{[c,d]} f + \sup_{[c,d]} g \Rightarrow \overline{S}(f+g,\pi) \leq \overline{S}(f,\pi) + \overline{S}(g,\pi)$$

$$\inf_{[c,d]}(f+g) \geq \inf_{[c,d]} f + \inf_{[c,d]} g \Rightarrow \underline{S}(f+g,\pi) \geq \underline{S}(f,\pi) + \underline{S}(g,\pi)$$

$$\overline{S}(f+g,\pi) - \underline{S}(f+g,\pi) \leq \overline{S}(f,\pi) + \overline{S}(g,\pi) - \underline{S}(f,\pi) - \underline{S}(g,\pi) < 2\cdot\varepsilon/2 = \varepsilon$$

co dowodzi, że $f+g$ jest całkowalna. Dalej

$$\overline{S}(f,\pi) \leq \int_{[a,b]} f + \varepsilon/2$$

$$\overline{S}(g,\pi) \leq \int_{[a,b]} g + \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \overline{S}(f,\pi) + \overline{S}(g,\pi) \leq \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g + \varepsilon$$

$$\int_{[a,b]}(f+g) \leq \overline{S}(f+g,\pi) \leq \overline{S}(f,\pi) + \overline{S}(g,\pi) \leq \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g + \varepsilon$$

Podobnie

$$\underline{S}(f,\pi) \geq \int_{[a,b]} f - \varepsilon/2$$

$$\underline{S}(g,\pi) \geq \int_{[a,b]} g - \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \underline{S}(f,\pi) + \underline{S}(g,\pi) \geq \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g - \varepsilon$$

$$\int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g - \varepsilon \leq \underline{S}(f,\pi) + \underline{S}(g,\pi) \leq \underline{S}(f+g,\pi) \leq \int_{[a,b]}(f+g)$$

Zaznaczone nierówności to

$$\int_{[a,b]}(f+g) \leq \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g + \varepsilon \quad \text{i} \quad \int_{[a,b]}(f+g) \geq \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g - \varepsilon$$

$$\int_{[a,b]}(f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g \qquad (**)$$

Z $(*)$ i $(**)$ wynika teza.

Wykazaliśmy, że $\mathcal{R}([a,b])$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni funkcji na odcinku $[a,b]$ oraz że odwzorowanie $\mathcal{R}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ polegające na wzięciu całki jest odwzorowaniem liniowym.

Funkcje całkowalne na $[a,b]$ ograniczone, wobec tego ich obraz zawiera się w pewnym zwartym odcinku. Kolejne twierdzenie:

FAKT: $f \in \mathcal{R}([a,b])$, F – ciągła na zbiorze zawierającym $\operatorname{im} f$. Funkcja $F \circ f$ jest całkowalna na $[a,b]$. (Rudin)

DOWÓD: Ograniczamy F do $[c,d]$ takiego, że $\operatorname{im} f \subset [c,d]$. Wtedy $F|_{[c,d]}$ jako funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest jednostajnie ciągła. Oznacza to, że dla $|y_1 - y_2| < \delta$ mamy $|F(y_1) - F(y_2)| < \varepsilon$ niezależnie od tego gdzie w odcinku $[c,d]$ punkty y_1, y_2 są położone. Zmniejszając ewentualnie δ można przyjąć $\delta < \varepsilon$. Oznaczmy także $K = \sup_{[c,d]} |F|$

Dla tego samego $\varepsilon > 0$ znajdziemy podział π taki, że $\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \delta^2$
Niech $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$. Oznaczmy

$$M_i = \sup_{[t_{i-1},t_i]} f \qquad m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i]} f \qquad \tilde{M}_i = \sup_{[t_{i-1},t_i]} F\circ f \qquad \tilde{m}_i = \inf_{[t_{i-1},t_i]} F\circ f$$

Wskaźniki $\{1, \dots, n\}$ dzielimy na dwa zbiory A i B

$$i \in A \iff M_i - m_i < \delta \qquad i \in B \iff M_i - m_i \geq \delta$$

jeśli $i \in A$ mamy $\tilde{M}_i - \tilde{m}_i < \varepsilon$

$$\sum_{i\in A}(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon \sum_{i\in A}(t_i - t_{i-1}) \leqslant \varepsilon(b-a)$$

okazuje się, że indeksów z B nie ma zbyt dużo, a przynajmniej odpowiadają małym odcinkom

$$\delta \cdot \sum_{i\in B}(t_i - t_{i-1}) \overset{M_i - m_i > \delta}{\leqslant} \sum_{i\in B}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \leqslant \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \delta^2$$

$$\sum_{i\in B}(t_i - t_{i-1}) < \delta$$

Teraz spróbujemy oszacować różnicę

$$\overline{S}(F\circ f,\pi) - \underline{S}(F\circ f,\pi) = \sum_{i=1}^{m}(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i\in A}(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i\in B}\overbrace{(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)}^{\leqslant 2K}(t_i - t_{i-1})$$

$$\leqslant \varepsilon(b-a) + 2K\cdot \underset{\delta<\varepsilon}{\delta} \leqslant \varepsilon\underbrace{(b-a+2K)}_{\text{stałe}}$$

Funkcja $F\circ f$ jest więc całkowalna. ∎

Powyższe twierdzenie pozwala poszerzyć istotnie znaną klasę funkcji całkowalnych. Zauważmy przede wszystkim, że całkowalna jest identyczność:

$[a,b] \ni t \mapsto t \in \mathbb{R}$ Weźmy podział $[a,b]$ na n równych części: niech $d = b-a$

$$\overline{S}(id,\pi) - \underline{S}(id,\pi) = \left[\left(a+\cancel{\tfrac{d}{n}}\right)\frac{d}{n} + \left(a+\cancel{\tfrac{2d}{n}}\right)\frac{d}{n} + \dots + \left(a+\frac{m}{m}d\right)\frac{d}{n}\right] - \left[a\cdot\frac{d}{n} + \left(a+\cancel{\tfrac{d}{n}}\right)\frac{d}{n} + \dots + \left(a+\cancel{\tfrac{n-1}{n}d}\right)\frac{d}{n}\right] = (a+b-a)\frac{d}{n} - a\cdot\frac{d}{n} = (b-a)\frac{d}{n} = \frac{(b-a)^2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Biorąc id jako f i dowolne ciągłe F dostajemy, stosując FAKT 2, że funkcje ciągłe są całkowalne w sensie Riemanna

Pokazywaliśmy, że jeśli $f,g \in R([a,b])$ to $f+g,\ f-g \in R([a,b])$. Weźmy $x \xrightarrow{F} x^2$ – jest to funkcja ciągła. Stosując FAKT 2 dostajemy że całkowalne są: $(f+g)^2, (f-g)^2 \quad f\cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$

Funkcja $t \longmapsto |t|$ jest ciągła, wobec tego jeśli f jest całkowalna to $|f|$ też.
Ponadto, z odpowiednich nierówności dla sum dolnych i górnych wynika, że jeśli $\forall t \in [a,b]$ $f(t) \leqslant g(t)$ i f, g całkowalne to $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

Ponieważ $f \leqslant |f|$ i $-f \leqslant |f|$ to $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} |f|$ i $-\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} |f|$ Mamy więc

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

Teraz zajmiemy się niebieską częścią, tzn własnościami samej całki:

FAKT 3 Niech $f \in R([a,b])$ i niech $c \in]a,b[$ wtedy $f \in R([a,c])$ i $f \in R([c,b])$ oraz

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

DOWÓD:
Ustalmy $\varepsilon > 0$. Skoro $f \in R([a,b])$ to istnieje π – podział $[a,b]$ taki, że

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$

Weźmy podział $\pi_0 = \{a, t_1, t_2, \dots, t_m, \dots, t_{n-1}, b\}$ taki, że dla pewnego $m < n$ $t_m = c$ i π_0 jest drobniejszy niż π. Wtedy

$$\overline{S}(f,\pi_0) - \underline{S}(f,\pi_0) \leqslant \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$

Oznaczmy $\pi_1 = \{a, \dots, t_m\}$ $\pi_2 = \{t_m, \dots, b\}$. π_1 jest podziałem $[a,c]$, π_2 podziałem $[c,b]$. Mamy

$$\overline{S}(f,\pi_0) = \overline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) + \overline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) \; ; \quad \underline{S}(f,\pi_0) = \underline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) + \underline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) \; ;$$

$$\overline{S}(f,\pi_0) - \underline{S}(f,\pi_0) = \underbrace{\overline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) - \underline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1)}_{\geqslant 0} + \underbrace{\overline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) - \underline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2)}_{\geqslant 0} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) - \underline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) < \varepsilon \qquad \overline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) - \underline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) < \varepsilon$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$f \in R([a,c]) \qquad\qquad f \in R([c,b])$$