jeśli $i\in A$ mamy $\tilde{M}_i - \tilde{m}_i < \varepsilon$

$$\sum_{i\in A}(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon \sum_{i\in A}(t_i - t_{i-1}) \leq \varepsilon(b-a)$$

okazuje się, że indeksów z B nie ma zbyt dużo, a przynajmniej odpowiadają małym odcinkom

$M_i - m_i > \delta$

$$\delta\cdot\sum_{i\in B}(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i\in B}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \delta^2$$

$$\sum_{i\in B}(t_i - t_{i-1}) < \delta$$

Teraz spróbujemy oszacować różnicę

$$\overline{S}(F\circ f,\pi) - \underline{S}(F\circ f,\pi) = \sum_{i=1}^{m}(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i\in A}(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i\in B}\overbrace{(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)}^{\leq 2K}(t_i - t_{i-1})$$

$$\leq \varepsilon(b-a) + 2K\cdot\underset{\delta<\varepsilon}{\delta} \leq \varepsilon\underbrace{(b-a+2K)}_{\text{stałe}}$$

Funkcja $F\circ f$ jest więc całkowalna. ■

Powyższe twierdzenie pozwala poszerzyć istotnie znaną klasę funkcji całkowalnych. Zauważmy przede wszystkim, że całkowalna jest identyczność:

$[a,b]\ni t\mapsto t\in\mathbb{R}$ Weźmy podział $[a,b]$ na n równych części: niech $d=b-a$

$$\overline{S}(id,\pi) - \underline{S}(id,\pi) = \left[\cancel{\left(a+\frac{d}{n}\right)\frac{d}{n}} + \cancel{\left(a+\frac{2d}{n}\right)\frac{d}{n}} + \dots + \left(a+\frac{m\,d}{m}\right)\frac{d}{n}\right] - \left[a\cdot\frac{d}{n} + \cancel{\left(a+\frac{d}{n}\right)\frac{d}{n}} + \dots + \cancel{\left(a+\frac{n-1}{n}d\right)\frac{d}{n}}\right] = (a+b-a)\frac{d}{n} - a\cdot\frac{d}{n} = (b-a)\frac{d}{n} = \frac{(b-a)^2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Biorąc id jako f i dowolne ciągłe F dostajemy, stosując FAKT 2, że funkcje ciągłe są całkowalne w sensie Riemanna

Pokazywaliśmy, że jeśli $f,g\in R([a,b])$ to $f+g,\ f-g\in R([a,b])$. Weźmy $x\overset{F}{\longmapsto}x^2$ – jest to funkcja ciągła. Stosując FAKT 2 dostajemy że całkowalne są: $(f+g)^2,\ (f-g)^2$ $\quad f\cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$

Funkcja $t \longmapsto |t|$ jest ciągła, wobec tego jeśli f jest całkowalna to $|f|$ też.
Ponadto, z odpowiednich nierówności dla sum dolnych i górnych wynika, że jeśli $\forall t \in [a,b]$ $f(t) \leq g(t)$ i f, g całkowalne to $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

Ponieważ $f \leq |f|$ i $-f \leq |f|$ to $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f|$ i $-\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f|$ Mamy więc

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

Teraz zajmiemy się niebieską częścią, tzn własnościami samej całki:

FAKT 3 Niech $f \in R([a,b])$ i niech $c \in \,]a,b[$ wtedy $f \in R([a,c])$ i $f \in R([c,b])$ oraz

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

DOWÓD:
Ustalmy $\varepsilon > 0$. Skoro $f \in R([a,b])$ to istnieje π - podział $[a,b]$ taki, że
$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$

Weźmy podział $\pi_0 = \{a, t_1, t_2, \ldots, t_m, \ldots, t_{n-1}, b\}$ taki, że dla pewnego $m<n$ $t_m = c$ i π_0 jest drobniejszy niż π. Wtedy
$$\overline{S}(f,\pi_0) - \underline{S}(f,\pi_0) \leq \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$$
Oznaczmy $\pi_1 = \{a, \ldots, t_m\}$ $\pi_2 = \{t_m, \ldots, b\}$. π_1 jest podziałem $[a,c]$, π_2 podziałem $[c,b]$. Mamy

$$\overline{S}(f,\pi_0) = \overline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) + \overline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) \; ; \quad \underline{S}(f,\pi_0) = \underline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) + \underline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) \; ;$$

$$\overline{S}(f,\pi_0) - \underline{S}(f,\pi_0) = \underbrace{\overline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) - \underline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1)}_{\geq 0} + \underbrace{\overline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) - \underline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2)}_{\geq 0} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) - \underline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) < \varepsilon \qquad \overline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) - \underline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) < \varepsilon$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$f \in R([a,c]) \qquad\qquad f \in R([c,b])$$

Dla udowodnienia równości całek weźmy takie podziały π_1 i π_2 odcinków $[a,c]$ i $[c,b]$ odpowiednio aby

$$\overline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) \leqslant \int_{[a,c]} f + \varepsilon/2 \qquad\qquad \overline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) \leqslant \int_{[c,b]} f + \frac{\varepsilon}{2}$$

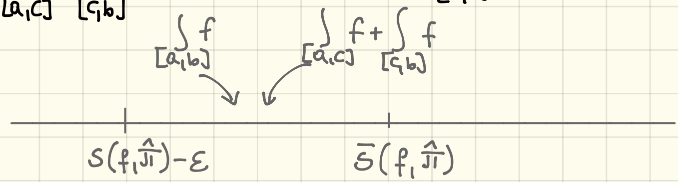
Wtedy dla $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ mamy

$$\overline{S}(f,\pi) \leqslant \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f + \varepsilon \quad (*)$$

Jednocześnie możemy wziąć $\tilde{\pi}$ taki że $\overline{S}(f,\tilde{\pi}) \leqslant \int_{[a,b]} f + \varepsilon$ $(**)$. Dla $\hat{\pi}$ drobniejszego niż π i $\tilde{\pi}$ zachodzą obie nierówności $(*)$ i $(**)$

$$\overline{S}(f,\hat{\pi}) \leqslant \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f + \varepsilon \qquad\qquad \overline{S}(f,\hat{\pi}) \leqslant \int_{[a,b]} f + \varepsilon$$

$$\overline{S}(f,\hat{\pi}) - \left(\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f\right) \leqslant \varepsilon \qquad\qquad \overline{S}(f,\hat{\pi}) - \int_{[a,b]} f \leqslant \varepsilon$$



$$\Rightarrow \quad \left| \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f - \int_{[a,b]} f \right| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Dość oczywiste jest uzasadnienie następującego faktu: Jeśli $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalne na $[a,c]$ i $[c,b]$ dla $c \in]a,b[$ to jest całkowalna na $[a,b]$

Ustalamy $\varepsilon > 0$ i bierzemy π_1, π_2, π podziały $[a,c]$, $[c,b]$, $[a,b]$ odpowiednio. Podział π jest drobniejszy niż $\pi_1 \cup \pi_2$, ponadto $\overline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) - \underline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\overline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) - \underline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) < \varepsilon/2$

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi_1 \cup \pi_2) - \underline{S}(f,\pi_1 \cup \pi_2) = \overline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) + \overline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) +$$

$$- \overline{S}(f_{|[a,c]},\pi_1) - \overline{S}(f_{|[c,b]},\pi_2) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Powyższy fakt pozwala rozszerzyć klasę funkcji całkowalnych w sensie Riemanna na funkcje kawałkami ciągłe pod warunkiem że liczba „kawałków” jest skończona. Całkowalne na odcinku domkniętym są więc funkcje mające skończenie wiele punktów nieciągłości. Można wykazać, że całkowalne w sensie Riemanna na odcinku domkniętym są funkcje, których zbiór punktów nieciągłości jest conajwyżej przeliczalny. Robić tego nie będziemy w tym momencie. Powrócimy do tego zagadnienia przy okazji całki z funkcji wielu zmiennych.

Próbując liczyć całkę z definicji zazwyczaj chcemy znaleźć $\underline{\int}$ lub $\overline{\int}$. Wyznaczanie $\sup \underline{S}(f,\pi)$ lub $\inf \overline{S}(f,\pi)$ po wszystkich podziałach jest kłopotliwe jednak. Zazwyczaj chcemy liczyć granicę zwykłego ciągu. Podobnie operowanie $\sup f$ i $\inf f$ na $[t_{i-1}, t_i]$ jest kłopotliwe. Dla funkcji ciągłych można tego uniknąć.

Dla podziału $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ odcinka $[a,b]$ definiujemy średnicę podziału $d_\pi = \max\limits_{i \in \overline{1n}} \{t_i - t_{i-1}\}$. Wypunktowaniem podziału π nazywamy zbiór $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subset [a,b]$ taki, że $\forall i \in \overline{1n}$ $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Używa się wypunktowania przy pomocy lewego końca: $\xi_i = t_{i-1}$, prawego końca $\xi_i = t_i$. Używa się także tzw. wypunktowanie Lagrange'a oczywiście tylko dla funkcji różniczkowalnych: w odcinku $[t_{i-1}, t_i]$ wybieramy ξ_i spełniające $f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$

TWIERDZENIE: $f \in C([a,b])$ $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ciąg podziałów taki, że $d_{\pi_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ Ξ_n niech oznacza dowolne wypunktowanie π_n. Wtedy dla $S(f,\pi_n,\Xi_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\pi_n,\Xi_n) = \int_{[a,b]} f$$

DOWÓD: Funkcja ciągła na $[a,b]$ jest jednostajnie ciągła. Znajdziemy więc $\delta>0$ takie że jeśli $|t'-t|<\delta$ to $|f(t')-f(t)|<\varepsilon$. W szczególności jeśli dla podziału π $d_\pi<\delta$ to dla dowolnego odcinka tego podziału różnica $\sup\limits_{[t_{i-1},t_i]} f - \inf\limits_{[t_{i-1},t_i]} f < \varepsilon$ zatem $\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi) < \underbrace{\varepsilon\cdot(b-a)}_{\text{może być dowolnie małe}}$

Poprawmy trochę:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta:\ |t'-t|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(t')-f(t)|<\frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

wtedy $\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon.$

f ciągła więc całkowalna. Mamy:

$$\underline{S}(f,\pi)\leq S(f,\pi,\Xi)\leq\overline{S}(f,\pi,\Xi) \quad i \quad \underline{S}(f,\pi)\leq\int_{[a,b]} f\leq\overline{S}(f,\pi)$$

ε $\qquad\qquad\qquad\qquad$ ε

$$\Downarrow$$

$$\left|S(f,\pi,\Xi)-\int_{[a,b]} f\right|<\varepsilon$$

dla ciągu π_n takiego że $d_{\pi_n}\longrightarrow 0$ zawsze znajdziemy n takie że $d_{\pi_n}<\delta$ czyli

$$\left|S(f,\pi_n,\Xi_n)-\int_{[a,b]} f\right|<\varepsilon$$

ciąg zbieżny do całki ∎

Funkcja musi być ciągła → znajdźcie kontrprzykład dla nieciągłych.

Ostatecznie jesteśmy gotowi na podstawowe twierdzenie.

TWIERDZENIE (Podstawowe rachunku różniczkowego i całkowego)

Niech $f\in\mathcal{R}([a,b])$ wtedy $F:[a,b]\ni x\longmapsto\int_{[a,x]} f\in\mathbb{R}$ jest ciągła. Ponadto jeśli f jest ciągła w x_0 to F jest różniczkowalna w x_0 i $F'(x_0)=f(x_0)$

DOWÓD Przypominamy, że w przypadku kiedy $b>a$ $\int_b^a f = -\int_a^b f = -\int_{[a,b]} f$

f jest całkowalna, wobec tego jest ograniczona. Weźmy $M \geq \sup_{[a,b]} |f|$ 15
dla dowolnych $x,y \in [a,b]$ mamy

$$F(x)-F(y) = \int_a^x f - \int_a^y f = \int_y^x f$$

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_y^x f\right| \leq M|x-y|$$

oznacza to, że F jest Lipshitzowska a to jest więcej niż ciągła!

Weźmy teraz $x_0 \in]a,b[$ taki, że f jest ciągła w x_0:

$$\frac{1}{h}\left(F(x_0+h)-F(x_0)\right) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f$$

Z ciągłości f w x_0 wnioskujemy, że dla $\varepsilon>0$ możemy wziąć δ taką, że

dla $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ $\quad f(x) \in]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$

$$\Updownarrow$$

$$f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$$

ta nierówność zachodzi dla $x \in [x_0-|h|, x_0+|h|]$ jeśli $|h|<\delta$.

$$(f(x_0)-\varepsilon)\cdot h \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f \leq (f(x_0)+\varepsilon)h$$

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0) \qquad \text{i.e. } F'(x_0)=f(x_0)$$

■

Z powyższego wynika, że każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną. W końcu dochodzimy do tego jak liczyć całkę oznaczoną.

TWIERDZENIE: Niech $f \in C([a,b])$, F pierwotna do f na $]a,b[$ i ciągła na $[a,b]$. Wtedy

$$\int_{[a,b]} f = F(b)-F(a)$$

tu można założyć $f \in R([a,b])$ dowód jest trudniejszy.