WYKŁAD 22 i 23

NIEWŁAŚCIWA CAŁKA RIEMANNA.

TWIERDZENIE: Niech $f \in C([a,b])$, F pierwotna do f na $]a,b[$ i ciągła na $[a,b]$. Wtedy

$$\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$$

tu można założyć $f \in R([a,b])$ dowód jest trudniejszy.

DOWÓD: Weźmy F - funkcja pierwotna do f i ciągła. Wiadomo że także $\phi(x) = \int_a^x f$ jest funkcją pierwotną. Oznacza to, że na $]a,b[$ F i ϕ różnią się o stałą. Stałą tę można wyznaczyć biorąc różnicę w punkcie a:

1

$$\phi(x) = F(x) + c \qquad \underbrace{\phi(a)}_{=0} = F(a) + c \qquad c = -F(a)$$

$$\phi(x) = F(x) - F(a)$$

$$\phi(b) = \int_a^b f = F(b) - F(a) \qquad \blacksquare$$

TWIERDZENIE: O CAŁKOWANIU PRZEZ CZĘŚCI: Niech $F, G \in C([a,b])$, F, G różniczkowalne na $]a,b[$, $f = F'$, $g = G'$ $g, f \in C([a,b])$

$$\int_a^b F \cdot g = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f \cdot G$$

DOWÓD:

$$(F \cdot G)' = Fg + fG \text{ na }]a,b[\qquad Fg + fG \text{ jest ciągła na } [a,b]$$

więc $\int_a^b Fg + fG = (F \cdot G)(a) - (F \cdot G)(b)$. $\blacksquare$

TWIERDZENIE: Niech $\varphi \in C^1(I)$, $[a,b] \subset I$ i φ ściśle rosnąca na $[a,b]$. Niech $[c,d] = \varphi([a,b])$, niech także f będzie ciągła na $[c,d]$. Wtedy $x \ni]a,b[\ni x \longrightarrow f(\varphi(x))\varphi'(x)$ jest całkowalna na $[a,b]$ i

$$\int_{[a,b]} (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_{[c,d]} f$$

DOWÓD: $f \circ \varphi$ jest ciągła na $[a,b]$, podobnie φ' zatem iloczyn jest ciągły a więc całkowalny. Równość całek wynika ze wzoru

$$(f \circ \varphi)'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

i podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego. Zwróćmy uwagę na warunek ściśłej monotoniczności. Oznacza on, że, w szczególności $\varphi(a) = c$ $\varphi(b) = d$ $\blacksquare$

Korzystając z omówionej teorii zdefiniujmy 2

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Własności log: (1) log jest określona na $]0,+\infty[$ (2) $t \mapsto \frac{1}{t}$ jest ciągła więc log jest klasy przynajmniej C^1 i $\log'(t) = \frac{1}{t}$. Ponieważ $t \to \frac{1}{t}$ jest $C^\infty(]0,\infty[)$ to log także jest C^∞ (3)

$s>0$

$$\log(sx) = \int_1^{sx} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^s \frac{1}{t}\,dt + \int_s^{sx} \frac{1}{t}\,dt = \log s + \int_1^x \frac{1}{s\alpha} s\,d\alpha = \log s + \log x$$

$\uparrow$ $t = s\alpha$ $\quad t=s \to \alpha = 1$

$dt = s\,d\alpha$ $\quad t = sx \to \alpha = x$

$$\log(sx) = \log s + \log x$$

(4) Funkcja log ma dodatnią pochodną wobec czego jest ściśle rosnąca na $]0,\infty[$. Dla $t>1$ przyjmuje dodatnie wartości, np $\log 2 > 0$. $\log 2^n = n \log 2$ zatem w obrazie log są dowolnie duże liczby. Ponadto $\log 1 = \log(t \cdot \frac{1}{t}) = \log t + \log\frac{1}{t} = 0$ $\log t = -\log\frac{1}{t}$. W obrazie log są więc dowolnie małe liczby.

Ostatecznie

$\log :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalną bijekcją.

(5) Z (4) wynika że istnieje odwrotność log i jest to funkcja różniczkowalna. Oznaczmy tę funkcję $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow]0,\infty[$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} \overset{H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1+t}}{1} = 1$$

W szczególności $t = \frac{x}{n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\frac{x}{n}+1)}{\frac{x}{n}} = 1$

$$\frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = \underbrace{\frac{1}{x}\left(n \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)}_{\downarrow 1} = \frac{1}{x}\underbrace{\log\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]}_{\downarrow x}$$

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = x \quad /\eta$$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \eta(x)$ tzn η jest wprowadzoną wcześniej funkcję $x \mapsto e(x)$. Będziemy ją od teraz oznaczać exp. Funkcja ta jest różniczkowalna co wynika z tw. o pochodnej funkcji odwrotnej

$$\exp'(\log(x)) = \frac{1}{\log'(x)} = x \qquad t = \log x \to x = \exp(t) \quad \boxed{\exp'(t) = \exp(t)}$$

Ze wzoru tego wynika między innymi, że funkcja exp jest funkcją gładką. W szczególności możemy napisać wzór Taylora dowolnego rzędu:

$$\exp(x) = \exp(0) + \exp'(0)\cdot x + \exp''(0)/2!\, x^2 + \dots + \exp^{(n)}(0)/n!\, x^n + R_n(x)$$

zapiszmy resztę w postaci Lagrange'a:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp^{(n+1)}(\xi) \qquad \xi \in [0, x]$$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(\xi)$$

exp(ξ) na zbiorze $[-|x|, |x|]$ jest ciągła więc ograniczona $\exp(\xi) \leq C$

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} C \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Oznacza to że ciąg $a_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny dla każdego x i jego granicą jest $\exp(x)$. Piszemy $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Definiujemy także, dla $a > 0$ $a^x = \exp(x \log a)$

KONIEC CAŁKI RIEMANNA PO ZWARTYM PRZEDZIALE.

W trakcie zajęć z fizyki napotkali już Państwo zapewne rachunki tego rodzaju: $\int_0^\infty x e^{-x} dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$

Spróbujemy je teraz sformalizować wprowadzając pojęcie całki Riemanna na przedziale niezwartym. Wchodzić w grę będą $]a, b[$ lub domknięty z jednej strony oraz $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$ lub domknięty z jednej strony a także oczywiście całe $\mathbb{R}$.

ZBIORY SKIEROWANE

Niech A będzie zbiorem. Relację $\succ$ w zbiorze A nazywamy relacją skierowania jeśli spełnione są następujące warunki

(1) $\forall a \in A \quad a \succ a$

(2) $\forall a,b,c \in A \quad a \succ b$ i $b \succ c \Rightarrow a \succ c$

(3) $\forall a,b \in A \ \exists c : \quad c \succ a$ i $c \succ b$

$(A, \succ)$ zbiór skierowany

PRZYKŁADY: Zbiór $\mathbb{R}$ z relacją $\geq$ jest zbiorem skierowanym. Podobnie $(\mathbb{N}, \geq)$. Niech Π będzie zbiorem podziałów odcinka $[a,b] \subset \mathbb{R}$. W Π wprowadzamy relację: $\pi \succ \rho$ jeśli π jest drobniejszy niż ρ. Π jest relacją skierowania.

Najważniejszy (dla nas) Przykład:

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym przedziałem. $\mathcal{K}(I)$ oznacza zbiór wszystkich przedziałów zwartych zawartych w I, tzn

$$\mathcal{K}(I) = \{[a,b] : [a,b] \subset I\}$$

Zbiór $\mathcal{K}(I)$ wraz z relacją zawierania jest zbiorem skierowanym. W tym kontekście, dla $K_1 \subset K_2$ mówimy, że K_2 jest późniejszy niż K_1 i piszemy $K_2 \succ K_1$.

Ciągi uogólnione nadają się dobrze do numerowania czegoś w rodzaju ciągów. Ciągiem uogólnionym o wartościach w zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\varphi : A \to X$, którego dziedziną jest zbiór skierowany $(A, \succ)$. Jeśli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną możemy wprowadzić pojęcie granicy ciągu uogólnionego. Dla ciągów uogólnionych stosuje się notację $(\varphi_a)_{a \in A}$ zamiast $\varphi : A \to X$ i $\varphi(a)$

Mówimy że $\varphi_0 \in X$ jest granicą ciągu uogólnionego $(\varphi_a)_{a \in A}$ jeżeli zachodzi

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ \forall b \succ a \quad \rho(\varphi_b, \varphi_0) < \varepsilon$$

Warunek (3) w definicji relacji skierowania gwarantuje, że granica, jeśli istnieje, jest jednoznaczna. Zapisać można także definicję uogólnionego ciągu Cauchy'ego

$$\forall \varepsilon>0\ \exists a\in A\quad \forall b,b'>a\quad \rho(\varphi_b,\varphi_{b'})<\varepsilon$$

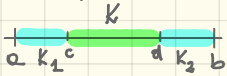
Dla ciągów uogólnionych obowiązuje wiele twierdzeń znanych dla ciągów zwykłych: monotoniczne i ograniczone ciągi uogólnione o wartościach w $\mathbb{R}$ są zbieżne. Rzeczywiste uogólnione ciągi Cauchy'ego są zbieżne. Rzeczywiste uogólnione ciągi zbieżne są Cauchy'ego ...

Niech teraz $I\subset\mathbb{R}$ będzie dowolnym przedziałem a f funkcją całkowalną na każdym $K\subset\mathcal{K}(I)$.

DEFINICJA: Mówimy że f jest całkowalna w sensie Riemanna na I jeśli ciąg uogólniony $\varphi_K=\int_K f$ jest zbieżny. Inne określenie: całka $\int_I f$ jest zbieżna.

Granicę ciągu $\int_K f$, jeśli istnieje, oznaczamy $\int_I f$

Obserwacja: Zauważmy, że powyższa definicja jest konsystentna z wprowadzonym wcześniej pojęciem całkowalności f na zbiorze zwartym. Istotnie, niech $I=[a,b]$. Wówczas $I\in\mathcal{K}(I)$ i f jest całkowalna na $[a,b]$. Dla dowolnego $K\in\mathcal{K}(I)$ znajdźmy $\int_{[a,b]} f-\int_K f$



$$K=[c,d]\quad \left|\int_{[a,b]} f-\int_K f\right| = \left|\int_{[a,c]} f+\int_{[d,b]} f\right| \leqslant \left|\int_{[a,c]} f\right| - \left|\int_{[d,b]} f\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{[a,c]}|f| + \int_{[d,b]}|f| \leqslant \sup_{[a,b]} f\,\big((c-a)+(b-d)\big)$$

Wybierając K tak aby $c-a<\varepsilon/2\sup f$ i $(b-d)<\varepsilon/2\sup f$ otrzymujemy

$\left|\int_{[a,b]} f-\int_K f\right|<\varepsilon$. Będzie tak również dla $K'>K$ zatem

$$\lim_{\succ}\int_K f=\int_{[a,b]} f$$

W poniższych faktach będziemy zakładać, że funkcje o których mowa są całkowalne na odpowiednich zbiorach zwartych. 6

FAKT: (Kryterium porównawcze zbieżności całki) Niech f, g będą nieujemne. Jeśli dla $x \in I$ $f(x) \leq g(x)$ to z istnienia $\int_I g$ wynika istnienie $\int_I f$

DOWÓD

Skoro g jest funkcją nieujemną to ciąg $\left(\int_K g\right)$ jest niemalejący, tzn $K' \supset K \Rightarrow \int_{K'} g > \int_K g$. Ciąg ten jest ograniczony przez wartość $\int_I g$.

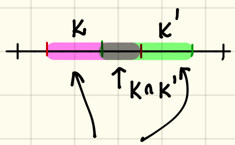
Ciąg $\left(\int_K f\right)$ także jest niemalejący. Mamy też $\int_K f \leq \int_K g \leq \int_I g$ zatem $\left(\int_K f\right)$ jest zbieżny. ■

FAKT: Jeśli całka $\int_I |f|$ jest zbieżna to $\int_I f$ także jest zbieżna.

DOWÓD: Mamy $f \leq |f|$, jednak ponieważ f nie musi być dodatnia poprzedni fakt nie ma zastosowania. Zamiast tego pokażemy że ciąg uogólniony $\int_K f$ spełnia warunek Cauchy'ego. Weźmy $K = [a,b]$ i $K' = [\alpha, \beta]$

$$\left|\int_K f - \int_{K'} f\right| = \left|\int_J \tilde{f}\right| \leq \int_J |f| \quad (*)$$

$\tilde{f} = \pm f$



$J = (K \div K')$

o funkcji f wiadomo, że jest całkowalna na I. W szczególności ciąg $\int_K |f|$ spełnia warunek Cauchy'ego. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy $[a,b]$ taki, że dla $K \supset [a,b]$, $K' \supset [a,b]$ $\left|\int_K |f| - \int_{K'} |f|\right| < \varepsilon$

$$(K \div K') = (K \setminus K') \cup (K' \setminus K) = (K \cup K') \setminus (K \cap K')$$

Dla K, K' takich jak w warunku Cauchy'ego dla $|f|$ mamy

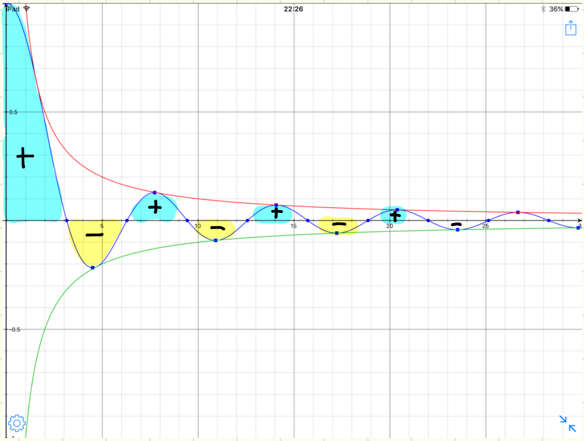
$$J = (K \cup K') \setminus (K \cap K') \subset (K \cup K') \setminus [a,b] = (K \setminus [a,b]) \cup (K' \setminus [a,b])$$

$$(*) \quad \int_J |f| \leq \int_{K \setminus [a,b]} |f| + \int_{K' \setminus [a,b]} f = \left|\int_K |f| - \int_{[a,b]} |f|\right| + \left|\int_{K'} |f| - \int_{[a,b]} |f|\right| < 2\varepsilon. \quad ■$$

DEFINICJA: Całka $\int_I f$ jest bezwzględnie zbieżna jeśli zbieżna jest $\int_I |f|$.

Poprzedni fakt pokazuje że całka bezwzględnie zbieżna jest zbieżna. W drugą stronę jednak nie jest co pokazuje następujący przykład:

PRZYKŁAD: Całka Dirichleta. Rozważmy całkę $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$



Pokażemy że całka ta jest zbieżna. Oszacujmy pojedynczy niebieski kawałek:

$$P_N = \int_{2N\pi}^{(2N+1)\pi} \frac{\sin x}{x}$$

$$\int_0^\pi \sin x\,dx$$

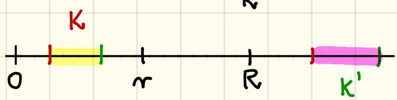
$$\frac{1}{(2N+1)\pi}\cdot 2 \leq P_N \leq \frac{1}{2N\pi}\cdot 2$$

Podobnie żółty $Q_N = \int_{(2N+1)\pi}^{(2N+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ $\quad \frac{2}{(2N+2)\pi} \leq Q_N \leq \frac{2}{(2N+1)\pi}$

$$0 \leq P_N - Q_N \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$$

Zatem $0 \leq \int_{2\pi N}^{2\pi M} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=N}^{M-1} P_k - Q_k \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right)$

Pokażemy że ciąg uogólniony $\int_K \frac{\sin x}{x}\,dx$ spełnia warunek Cauchy'ego.



Weźmy K, K' późniejsze niż $[r, R]$. $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ jest ciągła na $[0, \pi]$ i ograniczona przez 1, zatem całka po dowolnym odcinku $[a_K, a_{K'}] \subset [0, r]$ z funkcji $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ jest mniejsza niż długość tego odcinka i mniejsza niż r.

Biorąc $r < \frac{\varepsilon}{2}$ otrzymujemy całkę po żółtym fragmencie mniejszą niż $\frac{\varepsilon}{2}$.
Rozważmy fragment różowy

Całkę po zielonym kawałku mamy oszacowaną, całka D_1

$-\frac{2}{\pi(2N-1)} \leq D_1 \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\right)$ całka D_2: $0 \leq D_2 \leq \frac{1}{\pi M}$

$$-\frac{1}{\pi(N+\frac{1}{2})} \leq D_1+D_2+\int_{2\pi N}^{2\pi M}\frac{\sin x}{x}dx \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}+\frac{1}{N}-\frac{1}{M}+\frac{1}{M}\right) \leq \frac{1}{\pi}\frac{1}{N-1} \leq \frac{1}{\pi}\frac{2}{N}$$

$$\left|D_1+D_2+\int_{2\pi N}^{2\pi M}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \frac{2}{\pi(N-1)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$N > \frac{4}{\varepsilon\pi}+1$$

$2\pi(N-1) > R$ $\quad N-1 > \frac{R}{2\pi}$ $\quad N > \frac{R}{2\pi}-1 > \frac{4}{\varepsilon\pi}+1$ $\quad \frac{R}{2\pi} > \frac{4}{\varepsilon\pi}+2$ $\quad R > \frac{8}{\varepsilon}+4\pi$

dla $r < \frac{\varepsilon}{2}$ i $R > \frac{8}{\varepsilon}+4\pi$ oraz $K, K' \supset [r, R]$ mamy

$$\left|\int_K \frac{\sin x}{x} - \int_{K'}\frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$$ czyli ciąg uogólniony spełnia warunek Cauchy'ego. Całka Dirichleta jest więc zbieżna. Bezwzględna zbieżność jednak nie zachodzi. Rozważmy ciąg zbiorów zwartych

$K_N = [\pi, N\pi]$ funkcja $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ jest dodatnia zatem ciąg

$N \longrightarrow \int_{K_N}\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ jest rosnący. Jednocześnie $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$

$a_n = \int_{K_N}\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{N}\right)$ Rozważmy podciąg $N = 2^n$

$$a_N = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{N}\right) \quad a_{2^n} = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\underset{\uparrow \frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{4}+\underset{\uparrow 1/8}{\frac{1}{5}}+\underset{1/8}{\frac{1}{6}}+\underset{1/8}{\frac{1}{7}}+\frac{1}{8}+\dots+\underset{1/2^n}{\frac{1}{2^n-1}}+\frac{1}{2^n}\Big) \geqslant$$

9

$$\geqslant \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\times 2}+\underbrace{\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{8}}_{\times 4}+\dots+\underbrace{\frac{1}{2^n}+\dots+\frac{1}{2^n}}_{\times 2^{n-1}}\Big) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{2} = \frac{n}{\pi} \longrightarrow \infty$$

a_N jest rosnący i zawiera podciąg mający granicę ∞ zatem a_N ma granicę ∞. Ciąg uogólniony $\int_K \left|\frac{\sin x}{x}\right|$ nie jest więc zbieżny, bo ma rozbieżny podciąg. ∎

Zauważmy, że istotne znaczenie w badaniu zbieżności całki na odcinku $[a,+\infty[$ ma to co dzieje się daleko na prawo. Zamiast badać ciąg uogólniony $\int_K f$ można ograniczyć się do ciągu $\int_{[a,R]} f$ tzn funkcji $R \longmapsto \int_a^R f = F(R)$. Podciąg ten (uogólniony) spełnia warunek Cauchy'ego jeśli dla $\varepsilon>0$ istnieje R takie, że dla $R''>R'>R$

$$\left|\int_{[a,R']} f - \int_{[a,R'']} f\right| < \varepsilon \quad = \left|\int_{R'}^{R''} f\right| = \left|F(R'')-F(R')\right|$$ Jeśli więc

$$\lim_{R\to\infty} F(R) = C \in \mathbb{R} \quad \text{to} \quad F(R'')-F(R') \xrightarrow[\substack{R'\to\infty \\ R''\to\infty}]{} 0$$

$$\text{zatem} \quad \int_{[a,+\infty[} f = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f$$

FAKT: Niech I będzie dowolnym przedziałem. Jeśli $\int_I f$ i $\int_I g$ są zbieżne to $\int_I \alpha f+\beta g$ jest zbieżne dla $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ oraz $\int_I \alpha f+\beta g = \alpha\int_I f + \beta\int_I g$.

FAKT: Jeśli $\int_I |f|$ jest zbieżna to

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$$

FAKT: I, J przedziały $I \cap J \neq \emptyset$. Całka $\int_{I \cup J} f$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy $\int_I f$ i $\int_J f$ są zbieżne.

Gdy $I \cap J$ jest zbiorem jednopunktowym to $\int_{I\cup J} f = \int_I f + \int_J f$.

KRYTERIA CAŁKOWALNOŚCI CAŁEK NIEWŁAŚCIWYCH.

Mamy już kryterium porównawcze zbieżności całek dla funkcji nieujemnych. Można je przeformułować do wygodniejszej (czasem) postaci:

FAKT: $f, g \geqslant 0$. Jeśli istnieje $c > 0$: $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant c$ dla $x \in I$ to z całkowalności f wynika całkowalność g. Jeśli istnieje $d > 0$ takie, że $\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant d$ dla $x \in I$ to z całkowalności g wynika całkowalność f.

Dla funkcji nie będących stałego znaku mamy dwa kryteria całkowalności:

KRYTERIUM ABELA

TWIERDZENIE: $I = [a, \infty[$, f całkowalna na I, g monotoniczna i ograniczona na I. Wówczas fg jest całkowalna na I

TWIERDZENIE: $I = [a, \infty[$, $x \longmapsto \int_{[a,x]} f$ ograniczona, g monotoniczna i $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Wówczas fg całkowalna

KRYTERIUM DIRICHLETA

W dowodzie obu tych twierdzeń korzystamy z tzw. wzoru Bonneta, którego dotychczas nie dowodziliśmy. Podamy więc ten wzór jako lemat, który udowodnimy w następnej kolejności:

LEMAT (Wzór Bonneta) Niech f, g będą całkowalne na $[a,b]$, g monotoniczne. Wówczas istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że

$$\int_{[a,b]} f\cdot g = g(a)\int_{[a,\xi]} f + g(b)\int_{[\xi,a]} f$$

DOWÓD KRYTERIUM ABELA: Weźmy $R > r > a$. Zgodnie z lematem

$$\int_{[r,R]} f\cdot g = g(r)\int_{[r,\xi]} f + g(R)\int_{[\xi,R]} f$$

g jest ograniczona zatem $|g(r)| < C$, $|g(R)| < C$. f jest całkowalna, zatem $\lim_{y\to\infty}\int_{[y,y']} f = 0$ dla $y' > y$.

Warunek $r \to \infty$ pociąga $\xi \to \infty$ i $R \to \infty$ więc obie całki po $[r,\xi]$ i $[\xi,r]$ znikają dla $r \to \infty$. ■

DOWÓD KRYTERIUM DIRICHLETA: Stosujemy ten sam wzór:

$$\int_{[r,R]} f\cdot g = \underbrace{g(r)}_{\text{dąży do } 0}\underbrace{\int_{[r,\xi]} f}_{\text{ograniczone}} + \overbrace{g(R)}^{\text{dąży do } 0.}\underbrace{\int_{[\xi,R]} f}_{\text{ograniczone}} \xrightarrow{r,R\to\infty} 0.$$

■