SZEREGI LICZBOWE

Napis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oznacza parę ciągów rzeczywistych: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gdzie

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

W niektórych sytuacjach $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oznaczał będzie granicę $\lim_{n\to\infty} S_n$, czyli sumę szeregu liczbowego. Mówimy, że szereg liczbowy jest zbieżny jeśli granica istnieje i jest skończona.

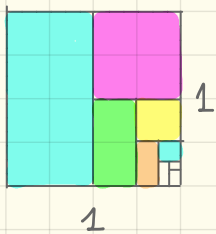
Historycznie rzecz biorąc koncepcja istnienia skończonej sumy nieskończonej liczby składników nastręczała trudności. Zainteresowani mogą poczytać o Zenonie z Elei, w szczególności zapoznać się z paradoksem żółwia i Achillesa. Ucząc się matematyki w toku nauki szkolnej pierwszy raz na szeregi liczbowe napotykamy przy okazji problemu zamiany ułamków zwykłych na ułamki dziesiętne. Okazuje się bowiem, że ułamki, których mianownik ma w rozkładzie na czynniki pierwsze czynniki inne niż 2 i 5 ma nieskończone rozwinięcie dziesiętne. Np:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333(3) \qquad \frac{1}{7} = 0{,}142857142857(142857)$$

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{1}{10^n}$$

$$\frac{142857}{10^6} + \frac{142857}{10^{12}} + \dots = 142857 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(10^{-6}\right)^n$$

Jeszcze inny przykład:



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Wszystkie powyższe przykłady to sumy szeregów geometrycznych, które policzyć jest względnie łatwo korzystając ze znanych wzorów:

$$1 - q^n = (1-q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \qquad (1 + q + \dots + q^n) = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

$$1+q+q^2+\dots+q^n=\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

2

Skończona granica istnieje gdy $|q|<1$. Wtedy $q^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ i

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

W wielu przypadkach nie potrafimy znaleźć jawnego wzoru na wyrazy ciągu S_n. Chcielibyśmy umieć wypowiadać się o zbieżności $\sum a_n$ na podstawie własności ciągu (a_n). Ponieważ S_n jest po prostu szczególnego rodzaju ciągiem warto sprawdzić co daje znane twierdzenie o zbieżności ciągów w tym szczególnym przypadku. Zaczniemy od warunku Cauchy'ego:

dla dowolnego ciągu (x_n):

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall m,n>N \quad |x_n-x_m|<\varepsilon$$

dla S_n

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall m,n>N \quad |S_m-S_n|<\varepsilon$$

dla $m>n$

$$|a_m+a_{m-1}+\dots+a_{n+1}|$$

w szczególności jeśli $n=m-1$ mamy

$|a_m|<\varepsilon$ czyli $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Warunek konieczny zbieżności: jeśli $\sum a_n$ zbieżny, tzn S_n jest ciągiem Cauchy'ego to $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. Jest to jedynie warunek konieczny, wynikanie w drugą stronę nie ma co pokazuje przykład

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ o którym była mowa wcześniej przy okazji całki Dirichleta

SZEREGI O WYRAZACH DODATNICH

W dalszym ciągu zajmować się będziemy szeregami, których wyrazy a_n są dodatnie (dodatnie dla prawie wszystkich n). W takim przypadku ciąg sum częściowych jest (od pewnego miejsca) monotonicznie rosnący. Wiadomo, że taki ciąg jest zbieżny jeśli jest ograniczony. Używając tego twierdzenie można rozstrzygnąć o zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right\} \leq$$

$$\leq 2 + 1 = 3$$

Ograniczenie znaleźliśmy porównując szereg $\sum \frac{1}{n!}$ ze zbieżnym szeregiem $\sum \frac{1}{2^n}$ zauważając że $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Ogólnie rzecz biorąc mamy twierdzenie

TWIERDZENIE PIERWSZE KRYTERIUM PORÓWNAWCZE Niech (a_n) i (c_n) będą ciągami dodatnimi takimi, że dla prawie wszystkich n zachodzi $a_n \leq c_n$. Wówczas jeśli $\sum c_n$ jest zbieżny to $\sum a_n$ też jest zbieżny. Jeśli $\sum a_n$ jest rozbieżny to także $\sum c_n$ jest rozbieżny.

Dowód jest oczywisty, więc nie będziemy go zapisywać. Pierwsze kryterium porównawcze jest bardzo ważne – w ostatecznym rozrachunku wszystkie inne kryteria wynikają z niego pośrednio. Skuteczne bezpośrednio jest jednak jedynie wtedy, gdy mamy do porównania odpowiednio dużo różnych szeregów zbieżnych i rozbieżnych. Jak narazie w „bazie danych" mamy

Zbieżne: $\sum q^n$ dla $|q|<1$, $\sum \frac{x^n}{n!}$ w szczególności $\sum \frac{1}{n!}$

Rozbieżne $\sum \frac{1}{n}$, $\sum q^n$ $|q| \geq 1$.

Bazę danych rozszerzymy stosując lemat o zagęszczaniu.

LEMAT O ZAGĘSZCZANIU

4

Niech (a_n) będzie nierosnącym ciągiem wyrazów dodatnich. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżny jest szereg $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

DOWÓD:

Niech $S_m = \sum_{i=1}^{m} a_i \quad R_k = \sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j}$

$$S_{2^k} = a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4}_{\geq a_4 + a_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\geq a_8 + a_8 + a_8 + a_8} + \underbrace{a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{16}}_{8 \times a_{16}} + \dots + \underbrace{a_{2^k}}_{2^{k-1} a^{2^k}} \geq$$

$$a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \dots + 2^{k-1} a_{2^k} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} 2^k a_{2^k} = a_1 + \frac{1}{2} R_k$$

$$S_{2^k} \geq a_1 + \frac{1}{2} R_k$$

$$S_{2^k-1} = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq a_2 + a_2} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{a_4 + a_4 + a_4 + a_4} + \underbrace{a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}}_{8 \cdot a_8} + a_{16} + \dots$$

$$\underbrace{\dots + a_{2^k-1}}_{\leq 2} \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^{k-1} a_{2^{k-1}} = R_{k-1} + a_1$$

$$S_{2^k-1} \leq a_1 + R_{k-1}$$

Załóżmy zatem, że ciąg (R_k) jest zbieżny. Z monotoniczności (R_k) wynika, że $\left(\lim_{k\to\infty} R_k = R\right)$ $\forall_k \; R_k \leq R$. Mamy więc

$$S_{2^k-1} \leq a_1 + R \quad \text{Ponadto } \forall n \in \mathbb{N} \; \exists k : \; n \leq 2^k - 1$$

zatem $S_m \leq S_{2^k-1} \leq a_1 + R$. Ciąg (S_m) jest więc ograniczony. Z monotoniczności S_m wynika zbieżność (S_m).

Niech teraz S_m będzie zbieżny. Z monotoniczności S_m wynika, że S_m ograniczony i $\forall n \; S_m \leq S = \lim_{n\to\infty} S_m$ zatem

$$S \geq S_{2^{k+1}} \geq a_1 + R_k$$

Ciąg (R_k) jest więc ograniczony i zbieżny.

Jest oczywiste że jeśli $R_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ to $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ co wynika z nierówności zielonej i odwrotnie, jeśli $S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ to także $R_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ co wynika z nierówności niebieskiej. ■

Zastosujmy lemat o zagęszczaniu do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p>0,\ p\in\mathbb{R}$ tzn rozważmy

$$\sum 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum \frac{2^k}{2^{k\cdot p}} = \sum \frac{1}{2^{kp-k}} = \sum \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$$

Otrzymaliśmy szereg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2^{p-1}}$. Wiemy że szereg ten jest zbieżny dla $|q|<1$ tzn

$$\left|\frac{1}{2^{p-1}}\right|<1 \quad 1<2^{p-1} \quad \text{i.e. } p>1.$$

Szereg $\sum \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p>1$ i rozbieżny dla $p\leq 1$.

Szeregi $\sum 1/n^p$ bardzo się przydają do badanie zbieżności szeregów różnych. Zwłaszcza w kontekście poniższego kryterium:

TWIERDZENIE DRUGIE KRYTERIUM PORÓWNAWCZE

Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami wyrazów nieujemnych, $b_n \neq 0$

$$m = \liminf \frac{a_n}{b_n} \qquad M = \limsup \frac{a_n}{b_n}$$

Jeśli $\sum b_n$ jest zbieżny i $M<\infty$ to $\sum a_n$ jest zbieżny.

Jeśli $\sum b_n$ jest rozbieżny i $m>0$ to $\sum a_n$ jest rozbieżny.

DOWÓD. Niech $\sum b_n$ będzie zbieżny i $M<\infty$. Przypominamy, że granica górna jest kresem górnym zbioru punktów skupienia. Jeśli $M<\infty$ to istnieje $c\geq M$, c skończone i takie, że prawie wszystkie wyrazy ciągu

$a_n/b_n < c$. Wtedy dla prawie wszystkich n $a_n < cb_n$ i możemy skorzystać z pierwszego kryterium porównawczego. 6

Weźmy teraz $\sum b_n$ rozbieżny i $m>0$. Granica dolna jest kresem dolnym zbioru punktów skupienia ciągu a_n/b_n. Dla każdej liczby d : $0>d>c$ zachodzi warunek: prawie wszystkie wyrazy ciągu a_n/b_n są większe niż d. Mamy więc, dla prawie wszystkich n

$\frac{a_n}{b_n} > d \Rightarrow a_n > d \cdot b_n$ i ponownie możemy skorzystać z pierwszego kryterium porównawczego. ■

PRZYKŁAD: Zbadajmy zbieżność szeregu

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+\sqrt{n}}{1+n^2}$ „Na oko" widać, że wyraz ogólny szeregu „zachowuje się" jak $\frac{1}{n^p}$ dla $p = 3/2$, spodziewamy się więc, że nasz szereg będzie zbieżny. Wybieramy $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}^3}$ i liczymy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2+\sqrt{n})\sqrt{n}^3}{1+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}^3 + n^2}{1+n^2} = 1 < \infty$$

■

Istnieje jeszcze trzecie kryterium porównawcze, ale prawdę mówiąc nigdy nie udało mi się go do niczego użyć. Dla porządku zanotujmy

TWIERDZENIE TRZECIE KRYTERIUM PORÓWNAWCZE

Niech (a_n), (b_n) będą ciągami o wyrazach dodatnich. Jeśli dla prawie wszystkich n zachodzi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

to ze zbieżności $\sum b_n$ wynika zbieżność $\sum a_n$, z rozbieżności $\sum a_n$

wynika rozbieżność $\sum b_m$.

DOWÓD Ponownie korzystamy z pierwszego kryterium porównawczego. Jeśli nierówność zachodzi dla prawie wszystkich n, to zachodzi dla wszystkich $n \geq N$ dla pewnego N

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_N} = \underset{\leqslant \frac{b_n}{b_{m-1}}}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}\ \underset{\leqslant \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} \cdots \underset{\leqslant \frac{b_{N+1}}{b_N}}{\frac{a_{N+1}}{a_N}} \leqslant \frac{b_n}{b_{m-1}}\frac{b_{m-1}}{b_{m-2}} \cdots \frac{b_{N+1}}{b_N} = \frac{b_m}{b_N}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a_n}{a_N} \leqslant \frac{b_m}{b_N} \Rightarrow a_n \leqslant \underbrace{\frac{a_N}{b_N}}_{\text{const.}} b_m \qquad \blacksquare$$

Jeśli do porównanie używamy szeregu geometrycznego otrzymujemy dwa klasyczne kryteria: Cauchy'ego i d'Alemberta

TWIERDZENIE KRYTERIUM CAUCHY'EGO

(a_n): $a_n \geqslant 0$ $\quad \alpha = \limsup \sqrt[n]{a_n}$

Jeśli $\alpha < 1$ szereg jest zbieżny, jeśli $\alpha > 1$ szereg jest rozbieżny.
Jeśli $\alpha = 1$ kryterium nie rozstrzyga.

DOWÓD: Jeśli $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \alpha < 1$ to istnieje $\beta > \alpha$ i $\beta < 1$ taka, że prawie wszystkie wyrazy ciągu $\sqrt[n]{a_n}$ spełniają

$$\sqrt[n]{a_n} < \beta \Rightarrow a_n < \beta^n \qquad \sum \beta^n \text{ zbieżny.}$$

Jeśli $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \alpha > 1$ to istnieje β: $\beta < \alpha$ i $\beta > 1$ taka że prawie wszystkie wyrazy ciągu $\sqrt[n]{a_n}$ spełniają

$$\sqrt[n]{a_n} > \beta > 1 \qquad a_n > \beta^n \qquad \sum \beta^n \text{ rozbieżny} \qquad \blacksquare$$

PRZYKŁAD: Kryterium Cauchy'ego zastosujemy do paskudnie wyglądającego szeregu 8

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}} \quad a_n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2n}}} = \frac{n\sqrt[n]{n}}{\sqrt{2n^2+n+1}} \sqrt[2n]{2n^2+n+1} =$$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{n^2}{2n^2+n+1}}}_{\downarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow 1} \; \underbrace{\sqrt[2n]{2n^2+n+1}}_{\downarrow 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \quad \text{szereg jest zbieżny} \quad \blacksquare$$

TWIERDZENIE KRYTERIUM D'ALEMBERTA

Niech (a_n) będzie ciągiem dodatnim. Oznaczamy

$$m = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad M = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Jeśli $M<1$ szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Jeśli $m>1$ szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

DOWÓD: Niech $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = M < 1$. Istnieje wtedy liczba $\beta < 1$ i $\beta > M$ taka, że

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta < 1 \quad \text{dla prawie wszystkich } n, \text{ tzn}$$

dla $n \geq N$ dla pewnego N

$$a_{n+1} < \beta a_n < \beta^2 a_{n-1} < \dots < \beta^{n-N+1} a_N = \beta^n \left(\frac{a_N}{\beta^{N-1}}\right) \qquad \sum \beta^n \text{ jest zbieżny}$$

Można też położyć $b_n = \beta^n$ i użyć $\underline{\text{III}}$ kryt. porównawczego.

Podobnie dowodzimy rozbieżności dla $m>1$.

$\blacksquare$

PRZYKŁAD: Kryterium d'Alemberta dobrze pasuje do szeregów, których wyrazy zawierają silnie, np:

9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\binom{3n}{n} 7^{-n}}_{a_n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{3n+3}{n+1} 7^{-n-1}}{\binom{3n}{n} 7^{-n}} = \frac{1}{7} \frac{(3n+3)!\, n!\, 2n!}{(n+1)!\,(2n+2)!\; 3n!} = \frac{1}{7} \frac{(3n+1)(3n+2)\cancel{(3n+3)}^{3}}{\cancel{(n+1)}(2n+1)(2n+2)} =$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{27}{4\cdot 7} = \frac{27}{28} < 1 \quad \text{szereg zbieżny.}$$

Kryteria Cauchy'ego i d'Alemberta są bardzo podobne. Kojarzyć się mogą z faktem o równości granic:

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad \text{jeśli granica po prawej stronie istnieje.}$$

Na podstawie „jednostronności" tego faktu można podejrzewać, że kryterium Cauchy'ego jest subtelniejsze. Tak też jest w istocie, a odpowiedni fakt to:

FAKT: Dla dowolnego ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich zachodzi

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf \sqrt[n]{a_n} \leqslant \underbrace{\limsup \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

PRZYKŁAD (Fichtenholz)

$$a,b>0 \qquad \sum x_n = \overset{0}{1} + \overset{1}{a} + \overset{2}{ab} + \overset{3}{a^2 b} + \overset{4}{a^2 b^2} + \overset{5}{a^3 b^2} + \overset{6}{a^3 b^3} + \dots$$

$$x_0 = 1 \quad x_1 = x_0 \cdot a \quad x_2 = x_1 \cdot b \quad x_3 = x_2 \cdot a \quad \dots$$

$$x_{2n} = x_{2n-1} \cdot b \qquad x_{2n+1} = x_{2n} \cdot a$$

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$ Kryterium d'Alemberta mówi więc, że szereg jest zbieżny dla $a,b<1$ i rozbieżny dla $a,b>1$.

$$\sqrt[2n]{a^n b^n} = \sqrt{ab} \quad , \quad \sqrt[2n+1]{a^{n+1} b^n} = a^{\frac{n+1}{2n+1}} b^{\frac{n}{2n+1}} = a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1/2}{2n+1}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{-1/2}{2n+1}}$$

$$\sqrt[2n+1]{a^{n+1}b^{n}} = a^{\frac{n+1}{2n+1}} b^{\frac{n}{2n+1}} = a^{\frac{1}{2}} \underset{\downarrow \atop 1}{a^{\frac{1/2}{2n+1}}} b^{\frac{1}{2}} \underset{\downarrow \atop 1}{b^{\frac{-1/2}{2n+1}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{ab}$$

Kryterium Cauchy'ego mówi, że szereg zbieżny gdy $ab<1$ i rozbieżny gdy $ab>1$.

DOWÓD: Udowodnimy nierówność zaznaczoną na niebiesko. Niech $\alpha = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Załóżmy że $\alpha < \infty$ (dla $\alpha = \infty$ nierówność zachodzi. Dla dowolnego $\beta > \alpha$ prawie wszystkie wyrazy ciągu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ spełniają $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta$. Prawie wszystkie, czyli z pewnością wszystkie dla $n \geqslant N$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < \beta \qquad a_n < \beta a_{n-1} < \beta^2 a_{n-2} < \dots < \beta^{n-N} a_N = \beta^n \frac{a_N}{\beta^N}$$

$$a_n < \beta^n \frac{a_N}{\beta^N}$$

$$\sqrt[n]{a_n} < \beta \sqrt[n]{\frac{a_N}{\beta_N}} \qquad \limsup \sqrt[n]{a_n} \leqslant \beta.$$

Mamy $\forall \beta > \alpha \ \limsup \sqrt[n]{a_n} \leqslant \beta \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{a_n} \leqslant \alpha = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ■

Na koniec jedna ważna własność szeregów o wyrazach dodatnich:

TWIERDZENIE

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem dodatnim i takim, że $\sum a_n$ jest zbieżny. Niech także $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie bijekcją. Oznaczmy $b_n = a_{\pi(n)}$. Szereg $\sum b_n$ jest zbieżny i sumy $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są jednakowe

DOWÓD:

$$S_m = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad R_m = \sum_{k=1}^{m} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)}$$

Weźmy $m(k) = \max\{\pi(1), \dots, \pi(k)\}$

$m(k) > k$ i $k \mapsto m(k)$ jest niemalejąca

$R_m \leqslant S_{m(n)}$ S_n jest ograniczony, $S_{m(n)}$ też zatem $\sum b_n$ jest zbieżny.

Role $\sum a_n$ i $\sum b_n$ można zamienić biorąc $\rho: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\rho = \pi^{-1}$

$\ell(k) = \max(\rho(1), \dots, \rho(k))$. Mamy wtedy

$S_m \leqslant R_{\ell(n)}$ Oba ciągi są zbieżne do tej samej granicy. ■

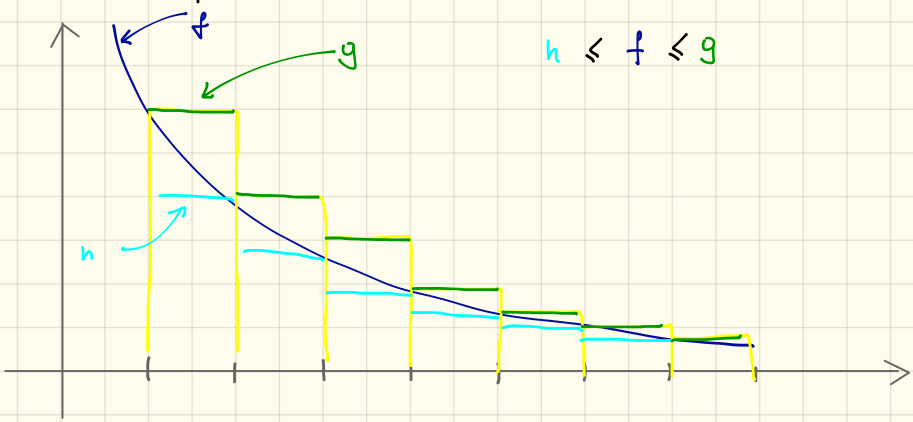
Wniosek: Szeregi o wyrazach dodatnich można sumować w dowolnej kolejności.

Zostało jeszcze jedno kryterium zbieżności szeregów:

TWIERDZENIE KRYTERIUM CAŁKOWE

Jeśli istnieje malejąca funkcja $f: [1, \infty[\to \mathbb{R}$ dodatnia taka, że $a_n = f(n)$ to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy zbieżna jest całka $\int_1^\infty f(x)\,dx$

DOWÓD:



$\int_1^\infty g(x)\,dx = \sum_1^\infty a_n \quad \int_1^\infty h(x)\,dx = \sum_2^\infty a_n \quad \Rightarrow$ g, h są całkowalne wtedy i tylko wtedy gdy $\sum a_n$ zbieżny.

Kryterium porównawcze całkowalności daje: jeśli g całkowalna to f całkowalna, zatem zbieżność $\sum a_n$ daje całkowalność f. Podobnie całkowalność f daje całkowalność h a więc całkowalność f daje zbieżność $\sum a_n$ $\blacksquare$

Znane są jeszcze inne kryteria zbieżności szeregów – kryterium Raabego, Kummera, Bertranda, Gaussa. Można o nich przeczytać w podręczniku Fichtenholz'a (tom II)

SZEREGI O WYRAZACH DOWOLNYCH

Zajmiemy się teraz szeregami, które mają wyrazy różnych znaków. Zauważmy przede wszystkim, że zajmować się trzeba jedynie szeregami, które mają nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i ujemnych. Jeśli jedynie skończona liczba wyrazów jest odmiennego znaku wówczas ciąg sum częściowych jest od pewnego miejsca monotoniczny (rosnący jeśli prawie wszystkie wyrazy są dodatnie, malejący jeśli prawie wszystkie są ujemne) i poprzednie twierdzenia można stosować.

Zacznijmy od przykładu: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ – szereg anharmoniczny. Rozpatrzymy dwa podciągi ciągu sum częściowych:

$$A_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{2k(2k-1)}$$

$$A_{2k+1} = \sum_{n=1}^{2k+1} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\dots\left(-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}\right) = 1-\frac{1}{6}-\frac{1}{20}+\dots-\frac{1}{2k(2k+1)}$$

$$A_{2k} = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2k(2k-1)} \qquad A_{2k+1} = 1-\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2k(2k+1)}$$

$$A_{2k} = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2k(2k-1)} \qquad A_{2k+1} = 1 - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2k(2k+1)}$$

(A_{2k}) jest rosnący, (A_{2k+1}) malejący, $A_{2k+1} - A_{2k} = \frac{1}{2k+1}$, $\quad A_{2k} < A_{2k+1}$
Oba podciągi są monotoniczne i ograniczone, a więc zbieżne. Ze względu na to, iż $\lim_{k\to\infty} A_{2k+1} - A_{2k} = 0$ oba ciągi zbiegają do tej samej granicy.

Ponieważ wyrazy ciągów (A_{2k+1}) i (A_{2k}) wyczerpują łącznie wszystkie wyrazy ciągu (A_n), także ciąg A_n jest zbieżny do wspólnej granicy.
Wkrótce, wykorzystując teorię szeregów potęgowych będziemy umieli stwierdzić iż $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \log 2$.

Sposób w jaki dowodziliśmy zbieżności szeregu anharmonicznego można zastosować do dowolnego szeregu postaci $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jeśli $a_n > 0$, a_n malejący i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

TWIERDZENIE KRYTERIUM LEIBNIZA

Niech (a_n) będzie dodatnim ciągiem malejącym z granicą równą 0. Szereg $\sum (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

DOWÓD: Rozpatrujemy podciągi ciągu sum częściowych:

$$A_{2k} = (-a_1 + a_2)(-a_3 + a_4) \cdots (-a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{m=1}^{k} (-a_{2m-1} + a_{2m})$$

$$A_{2k+1} = -a_1 + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2k} - a_{2k+1}) = -a_1 + \sum_{m=1}^{k} (a_{2m} - a_{2m-1})$$

A_{2k} jest malejący, A_{2k+1} jest rosnący, $A_{2k+1} < A_{2k}$, $A_{2k+1} - A_{2k} = -a_{2k+1}$
Oba podciągi są zbieżne do tej samej granicy, zatem (A_n) także jest zbieżny ■

PRZYKŁAD $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2 \pi}{n+1}\right)$

$$\sin\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right) = \sin\left(\pi\left[n + \frac{-n}{n+1}\right]\right) = \sin\left(\pi\left[n - 1 + \frac{1}{n+1}\right]\right) = \sin\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) =$$

$$\sin\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right) = \sin\left(\pi\left[n + \frac{-n}{n+1}\right]\right) = \sin\left(\pi\left[n-1+\frac{1}{n+1}\right]\right) = \sin\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) =$$

$$= \underbrace{\sin((n-1)\pi)}_{0}\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \cos((n-1)\pi)\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n-1}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}_{a_n}$$

14

Szereg spełnia założenia kryterium Leibniza. ■

Szereg anharmoniczny o którym mowa była wcześniej jest przykładem szeregu o którym mówimy, że jest zbieżny warunkowo, tzn sam szereg jest zbieżny, ale szereg wartości bezwzględnych już nie.

DEFINICJA Szereg $\sum a_n$ nazywamy **zbieżnym bezwzględnie** jeśli zbieżny jest szereg $\sum |a_n|$. Jeśli $\sum a_n$ jest zbieżny lecz $\sum |a_n|$ jest rozbieżny to $\sum a_n$ nazywamy **zbieżnym warunkowo**.

FAKT Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

DOWÓD: Istotnie, niech S_n będzie sumą częściową szeregu $\sum |a_n|$. Ciąg ten jest zbieżny, tzn spełnia warunek Cauchy'ego: $|S_n - S_m| < \varepsilon$ dla dużych n, m

$$|S_n - S_m| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_n| \quad (n > m)$$

Jeśli A_m oznacza sumę częściową dla $\sum a_n$ to

$$|A_n - A_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_n\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_n| = |S_n - S_m| < \varepsilon$$

Zatem (A_n) także spełnia warunek Cauchy'ego i jest zbieżny. ■

Szeregi zbieżne warunkowo mają pewną ciekawą własność o której mówi poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE (RIEMANN)

Jeśli $\sum a_n$ jest zbieżny warunkowo, to dla każdej liczby $S \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ istnieje bijekcja $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} = S$.

DOWÓD: Zauważmy, że szereg, który jest zbieżny warunkowo musi mieć nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i nieskończenie wiele ujemnych. W przeciwnym razie szereg byłby zbieżny bezwzględnie. Zdefiniujmy dwa zbiory:

15

$$N = \{a_n : a_n < 0\} \qquad P = \{a_n : a_n \geq 0\}$$

Oba zbiory są przeliczalne, uporządkujmy je tak, by elementy N tworzyły ciąg rosnący a elementy P ciąg malejący. Mamy więc dwa ciągi P_k i N_k – pierwszy dodatni, drugi ujemny, oba mające granicę równą 0.

Zauważmy, że jeśli $\sum a_n$ jest zbieżny warunkowo to $\sum P_k = \infty$ i $\sum N_k = -\infty$. W przeciwnym razie szereg byłby zbieżny bezwzględnie.

Ustalmy teraz $s \in \mathbb{R}$. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $s > 0$. Konstruujemy szereg zbieżny do s:

(1) k_1 jest najmniejszą liczbą naturalną taką że

$$P_1 + P_2 + \dots + P_{k_1} > s$$

(2) l_1 jest najmniejszą liczbą naturalną taką że

$$\sum_{i=1}^{k_1} P_i + N_1 + N_2 + \dots + N_{l_1} < s$$

(3) k_2 jest najmniejszą liczbą naturalną większą niż k_1 i taką, że

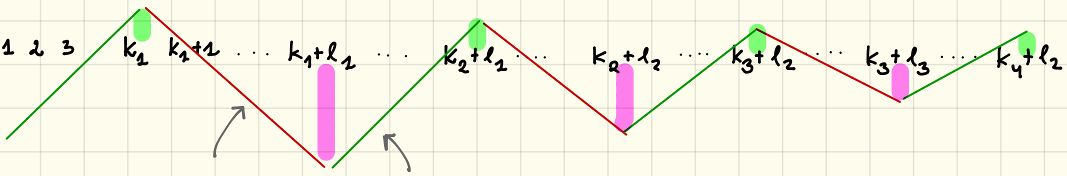
$$\sum_{i=1}^{k_1} P_i + \sum_{i=1}^{l_1} N_i + P_{k_1+1} + \dots + P_{k_2} > s$$

(4) W czwartym kroku znowu korzystamy z ujemnych wyrazów

⋮

Konstruujemy w ten sposób szereg, który jak łatwo sprawdzić jest zbieżny do s. Skoro bowiem a_{P_k} i a_{N_k} są monotoniczne i zbieżne do zera to znaczy że odległość sumy częściowej po wykonaniu dwóch kroków konstrukcyjnych jest mniejsza niż przed. Dokładniej, niech R_m będzie sumą częściową szeregu który konstruujemy. Mamy $|s-R_{k_i+l_i}|<|N_{l_i}|$ oraz $|s-R_{k_{i+1}+l_{i+1}}|<|N_{l_{i+1}}|<|N_{l_i}|$

Podobnie $|s-R_{k_i+l_{i-1}}|<P_{k_i}$ oraz $|s-R_{k_{i+1}+l_i}|<P_{k_{i+1}}<P_{k_i}$



$|R_n-s|$ jest między P_{k_1} a N_{l_1}

$|R_n-s|$ jest między N_{l_1} P_{k_2}

Oba ograniczenie dążą do zera, wobec tego $R_n-s \longrightarrow 0$.

Bardzo podobnie prowadzimy dowód dla $s<0$, zaczynając od elementów ciągu N_k. Nowa kolejność wyrazów ciągu (a_n) wyznacza odwzorowanie π.

Jeśli $s=\pm\infty$ także postępujemy podobnie. Np dla $s=+\infty$ konstruujemy nowy szereg w taki sposób, aby w nieparzystych krokach przekraczać kolejne liczby naturalne zaś w parzystych cofać się jedynie odrobinę, np o jeden wyraz ciągu ujemnego. ■

PRZYKŁAD:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots = \log 2$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}-\dots = 0$$

zadanie?

Dla szeregów liczbowych o wyrazach postaci $a_n b_n$ mamy dwa klasyczne twierdzenie podobne do odpowiednich twierdzeń o zbieżności całek niewłaściwych:

TWIERDZENIE KRYTERIUM DIRICHLETA

Niech $c_n = a_n b_n$ gdzie (a_n) jest ciągiem dodatnim, monotonicznie malejącym z granicą równą zero, (b_n) jest taki, że ciąg sum częściowych $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ jest ograniczony. Wówczas szereg $\sum c_n$ jest zbieżny.

i podobne

TWIERDZENIE KRYTERIUM ABELA

Niech $c_n = a_n b_n$ gdzie (a_n) jest ciągiem monotonicznym i ograniczonym, (b_n) jest taki, że szereg $\sum b_n$ jest zbieżny. Wówczas szereg $\sum c_n$ jest zbieżny.

Zauważmy że biorąc w kryterium Dirichleta $b_n = (-1)^n$ otrzymujemy kryterium Leibniza.

DOWÓD: Oszacujmy daleki fragment szeregu, czyli $|S_m - S_n|$ $(m > n)$

$$S_m - S_m = \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{m} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{m} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{m} a_k B_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{m} a_k B_k +$$

$$- \sum_{k=n}^{m-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=n+1}^{m-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + a_m B_m - a_{m+1} B_m$$

B_m jest ograniczony, tzn istnieje $M > 0$: $|B_m| < M$

$$|S_m - S_m| = \left| \sum_{n+1}^{m-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + a_m B_m - a_{n+1} B_m \right| \leq M \left(\sum_{n+1}^{m-1} a_k - a_{k+1} + a_m + a_{n+1} \right) =$$

$$= M \left(a_{n+1} - \cancel{a_{n+2}} + \cancel{a_{n+2}} - \cancel{a_{n+3}} + \dots + \cancel{a_{m-1}} - \cancel{a_m} + \cancel{a_m} + a_{n+1} \right) = M \cdot 2 a_{n+1} < \varepsilon$$

Wiadomo, że $a_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ więc dla wystarczająco dużego n $a_n < \frac{\varepsilon}{2M}$

■

DOWÓD: Kryterium Abela

a_n jest monotoniczny i ograniczony, a więc zbieżny. Niech $a_\infty = \lim_{n \to \infty} a_n$

ciąg o wyrazach $a_\infty - a_n$ jest monotoniczny i zbieżny do zera. Załóżmy, że $a_\infty - a_n$ jest dodatni. Jeśli tak nie jest używamy $a_n - a_\infty$. Do szeregu

17

$\sum (a_\infty - a_n) b_n$ stosujemy kryterium Dirichleta. Wiadomo także, że zbieżny jest $\sum a_\infty b_n$. Mamy więc:

$$\sum a_n b_n = \sum a_\infty b_n - \sum (a_\infty - a_n) b_n$$

zbieżny jako suma szeregów zbieżnych ■

PRZYKŁAD: $\sum \frac{\sin n}{2n - \cos n}$

$$a_n = \frac{1}{2n - \cos n} \qquad b_n = \sin n$$

$a_n > 0$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

$2(n+1) - \cos(n+1) - 2n + \cos n = 2 - \cos(n+1) + \cos n > 0$ zatem $\frac{1}{a_{n+1}} > \frac{1}{a_n}$ czyli $a_n > a_{n+1}$ i.e. ciąg malejący

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k) \underset{\text{algebra}}{=} \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin \frac{1}{2}}$$ jest ograniczone ■

Do rozważenia pozostał nam jeszcze problem mnożenia szeregów. O ile dodawanie szeregów i mnożenie szeregu przez liczbę to operacje proste do zdefiniowania i zbadania, o tyle mnożenie szeregów przez siebie nastręcza pewne kłopoty. Można myśleć na trzy (co najmniej) sposoby:

(1) Mnożymy wyrazy szeregów, tzn. z szeregów o wyrazach (a_n) i (b_n) tworzymy szereg o wyrazach $c_n = a_n b_n$. Jest to sposób mało sensony, a w każdym razie takiej operacji nie nazywałabym raczej „mnożeniem szeregów". W szczególności suma takiego iloczynu ma niewielki związek z iloczynem sum szeregów, które wchodzą jako czynniki.

18

(2) Patrzymy na szeregi jako na ciągi sum częściowych i mnożymy sumy częściowe tak jak mnożymy ciągi:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} a_n, \qquad C_n = A_n B_n.$$

W takiej sytuacji

$$\begin{aligned}
&C_1 = A_1B_1 = a_1b_1 \\
&C_2 = A_2B_2 = a_1b_1 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 \\
&C_3 = A_3B_3 = a_1b_1 + a_2b_1 + a_3b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_3b_2 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 \\
&\vdots \\
&C_n = A_nB_n = \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} a_ib_j
\end{aligned}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	b_1a_1	b_2a_2	b_1a_3	b_1a_4
b_2	b_2a_1	b_2a_2	b_2a_3	b_2a_4
b_3	b_3a_1	b_3a_2	b_3a_3	b_3a_4
b_4	b_4a_1	b_4a_2	b_4a_3	b_4a_4

zatem wyrazy szeregu wyglądają następująco

$$\begin{aligned}
&c_1 = a_1b_1 \\
&c_2 = a_2b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 \\
&c_3 = a_3b_1 + a_3b_2 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 \\
&\vdots \\
&c_n\ \cancel{C_n} = \cancel{A_nB_n} = a_n \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k + b_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_nb_n
\end{aligned}$$

Teraz mamy pewność, że jeśli szeregi-czynniki są zbieżne to iloczyn też jest zbieżny (stosowne twierdzenia dla ciągów) do iloczynu sum czynników. Wydawałoby się, że sytuacja jest idealna, tym niemniej jest jeszcze jedna ważna koncepcja mnożenia szeregów:

(3) **Iloczyn Cauchy'ego**, który pochodzi od problemów związanych z szeregami potęgowymi. Załóżmy, że szeregi, które mnożymy mają szczególną postać:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n$$

gdzie (f_n) i (g_n) są pewnymi ciągami, a x jest zmienną (możemy myśleć, że rzeczywistą). Innymi słowy $a_n = f_n x^n$, $b_n = g_n x^n$. Mnożymy teraz (formalnie) nieskończone sumy grupując wyrazy przy kolejnych potęgach x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n = (f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots)(g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + \ldots) =$$
$$(f_1g_1)x^2 + (f_1g_2 + f_2g_1)x^3 + (f_1g_3 + f_2g_2 + f_3g_1)x^4 + \ldots =$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} f_k g_{n-k} \right) x^n.$$

Patrząc na te formalne rachunki definiujemy

Definicja 2 (Iloczyn Cauchy'ego)**.** *Iloczynem Cauchy'ego szeregów* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *nazywamy szereg, którego wyraz ogólny ma postać*

$$c_1 = 0, \quad c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \ \textit{dla}\ \ n > 1.$$

Pozostaje oczywiście otwarty problem zbieżności tego szeregu i związek tej zbieżności ze zbieżnością szeregów-czynników.

		a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$
$c_1 \to$	b_1	b_1a_1	b_1a_2	b_1a_3	b_1a_4	
$c_2 \to$	b_2	b_2a_1	b_2a_2	b_2a_3	b_2a_4	
$c_3 \to$	b_3	b_3a_1	b_3a_2	b_3a_3	b_3a_4	
$c_4 \to$	$\vdots$					

19

Zauważmy, że sumy nieskończona rozważana w (2) i w (3) mają ostatecznie takie same zbiory wyrazów, tzn są to sumy jednomianów postaci $a_k b_l$. Różnią się jednak one istotnie kolejnością dodawania, co ma znaczenie dla szeregów zbieżnych warunkowo. Nikogo więc nie zdziwi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 13. *Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny do sumy A, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny do sumy B to ich iloczyn Cauchy'ego jest zbieżny do sumy AB.*

Mamy dodatkowo także twierdzenie

Twierdzenie 14. *Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do A, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny do B oraz ponadto ich iloczyn Cauchy'ego jest zbieżny do C, to $C = AB$.*

Jeśli oba szeregi są zbieżne jedynie warunkowo mogą powstawać problemy, co pokazuje następujący przykład:

Przykład 7. Niech $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n+1)}}$. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo (kryterium Leibniza). Policzmy iloczyn w sensie Cauchy'ego

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Sumujemy od 0, dla uproszczenia wzoru na wyraz ogólny iloczynu, który ma postać

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Przyjrzyjmy się pierwszym kilku wyrazom:

$$\begin{aligned}
&c_0 = 1\\
&c_1 = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \approx -1,41\\
&c_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,65\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Zatem, przynajmniej początkowo, wartości bezwzględne wyrazów szeregu nie maleją. Zbadajmy dokładniej wyraz ogólny:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{(k+1)}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{(n-k+1)}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Szacujemy $\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$:

$$(k+1)(n-k+1) = \left((\frac{n}{2}+1) - (\frac{n}{2}-k)\right)\left((\frac{n}{2}+1) + (\frac{n}{2}-k)\right) =$$

$$(\frac{n}{2}+1)^2 - (\frac{n}{2}-k)^2 \leqslant (\frac{n}{2}+1)^2,$$

zatem

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{(\frac{n}{2}+1)^2}} = \frac{1}{(\frac{n}{2}+1)}.$$

20

Wartość bezwzględna wyrazu ogólnego c_n jest zatem oszacowana z dołu poprzez

$$|c_n| \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(\frac{n}{2}+1)} = \frac{(n+1)}{(\frac{n}{2}+1)}.$$

Wiadomo, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(\frac{n}{2}+1)} = 2 \neq 0.$$

Wyraz ogólny nie może więc być zbieżny do zera. Szereg będący iloczynem Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ przez siebie nie spełnia warunku koniecznego, a to znaczy, że jest rozbieżny. ♣