Jeśli chcę mieć bijekcję z X do Y muszę złożyć G z ψ^{-1} obcięte do $\psi(Y)$.
ψ^{-1} obcina jedno zero

$$(\underbrace{0,0,0}_{2k+1},1\ldots) \longmapsto (\underbrace{0,\ldots,0}_{2k},1)$$

$$(\underbrace{0,0,\ldots 0}_{2k},1\ldots) \longmapsto (\underbrace{0,\ldots,0}_{2k+1},1\ldots)$$

nieparzystemu obcina jedno zero a parzystemu dodaje jedno zero.

Powracamy do nieco mniej skomplikowanych zagadnień. Wprowadziliśmy pojęcie relacji oraz wyróżniliśmy szczególne relacje zwane odwzorowaniami. Teraz pora na zupełnie inny rodzaj relacji. Definiujemy relację równoważności:

DEFINICJA Relacją równoważności w zbiorze X nazywamy relację R spełniającą trzy poniższe własności:

(1) relacja jest zwrotna tzn $\forall_x\ (x,x)\in R$

(2) relacja jest symetryczna tzn

$$\forall (x,y)\in X \quad (x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$$

(3) relacja jest przechodnia tzn.

~~jeśli~~ $\forall x,y,z \in \mathbb{R} \quad (x,y) \in R \text{ i } (y,z) \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,z) \in R$

Relacje równoważności służą do utożsamiania elementu zbioru ze względu na jakieś cechy

Zamiast pisać

$(x,y) \in R$

piszemy zazwyczaj $x \sim y$ dodając $x \sim_R y$ jeśli jest taka potrzeba (tzn mówimy o więcej niż jednej relacji na raz)

DEFINICJA: Klasą abstrakcji, klasą równoważności ze względu na R nazywamy zbiór

$$[x]_R = \{ y \in X : x \sim y \}$$

FAKT: Niech X będzie zbiorem a R relacją równoważności w tym zbiorze. Wtedy X jest rozłączną sumą klas abstrakcji relacji R.

DOWÓD: Wykażemy, że (1) każdy element zbioru X należy do jakiejś klasy abstrakcji, (2) klasy są albo równe albo rozłączne.

Ad 1: Relacja jest zwrotna dlatego każdy element wyznacza klasę równoważności

$\forall\, x \in [x]_R$

Ad$_2$ Niech $x, y \in X$ wówczas są dwie możliwości

$\rightarrow x \sim y$ $\rightarrow x \not\sim y$

gdy $x \sim y$ to $[x]_R = [y]_R$

istotnie $z \in [x]_R$ tzn $z \sim x$ ale $x \sim y$ więc, z przechodniości $z \sim y$ więc $z \in [y]_R$

podobnie w drugą stronę.

Mamy $[x]_R \subset [y]_R$ i $[y]_R \subset [x]_R$ więc $[y]_R = [x]_R$

$\square$

gdy $x \not\sim y$ to $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

istotnie gdyby istniało $z \in [x]_R \cap [y]_R$ to $z \sim x$ i $z \sim y$ oraz (z przechodniości) $x \sim y$

sprzeczność!

Przykłady relacji równoważności

GALARETKI $\rightarrow$ życiowy

JAK ZROBIĆ $\mathbb{Z}$ z $\mathbb{N}$ $\rightarrow$ matematyczny

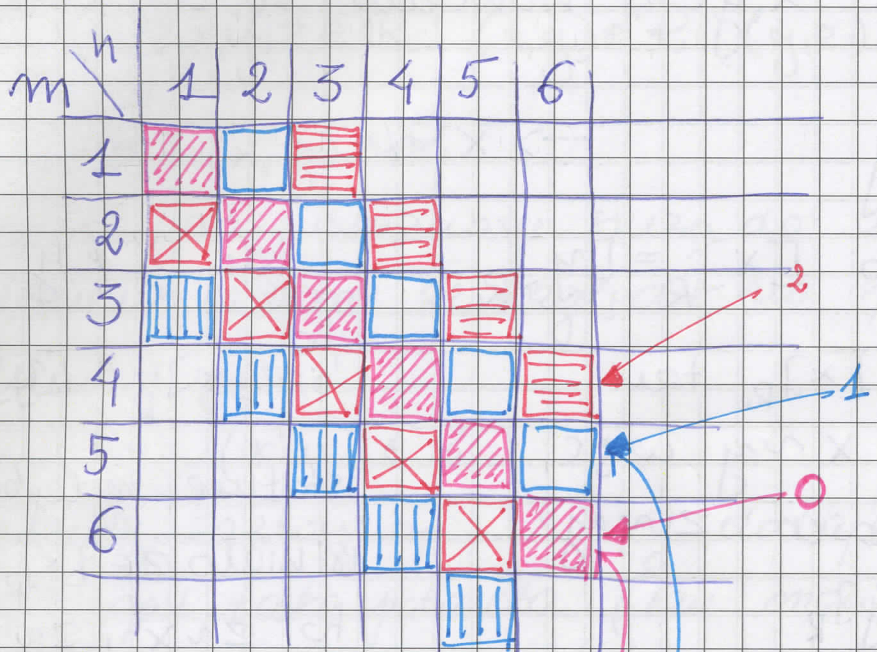
Niech $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (pary liczb naturalnych)

W X wprowadzamy relację, która mówi, że para (n, m) jest równoważna parze (n', m') jeśli

$$n + m' = m + n'$$

Przyjrzyjmy się, na obrazku, które pary są równoważne

~~23~~ 24



$(1,1) \sim (2,2) \sim \dots$ $\qquad [(1,1)] = \{(m,n) : m = n\}$

$(2,1) \sim (n,m)$ $\qquad [(2,1)] = \{(n,m) : n = m+1\}$

$n + 1 = m + 2$

$n = m + \cancel{2}\,1$

Wprowadzamy oznaczenie

$[(1,1)] = 0$

$[(2,1)] = 1$

$[(3,1)] = 2$

$[(1,2)] = -1$

$[(1,3)] = -2$ itd

Wprowadzamy działanie na klasach równoważności

$$[(n,m)] + [(k,l)] = [(n+k,\, m+l)]$$

Najpierw należy sprawdzić, czy to działanie jest poprawnie zdefiniowane, tzn. czy nie zależy od wyboru reprezentantów klasy równoważności

$$[(n,m)] + [(k,l)] \overset{?}{=} [(n+\alpha, m+\cancel{\beta}\alpha)] + [(k+\beta, l+\beta)]$$

$$[(n+k, m+l)] \overset{?}{=} [(n+\alpha+k+\beta, m+\alpha+l+\beta)]$$

te klasy są równe!

działanie nie zależy od wyboru reprezentanta. Inaczej

$[(n,m)] = [(n',m')]$ i $[(k,l)] = [(k',l')]$

czy $[(n+k, m+l)] = [(n'+k', m'+l')]$

tzn czy

$$n+k+m'+l' = m+l+n'+k'$$

Niezależnie od wyboru reprezentanta mamy ten sam wynik dodawania

Oznaczymy $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_\sim =: \mathbb{Z}$

Otrzymaliśmy $(\mathbb{Z}, +)$ Jakie to dodawanie ma własności? Zauważmy, że

(1) element $[(n,n)]$ jest wyróżniony w tym sensie, że

$$[(k,l)] + [(n,n)] = [(k+n, l+n)] = [(k,l)]$$

element neutralny

$\forall [(n,m)]$ mamy $[(m,n)]$

$$[(n,m)] + [(m,n)] = [(n+m, m+n)] =$$
$$= [(1,1)] = 0$$

Powiemy że $[(m,n)]$ jest przeciwny do $[(n,m)]$

Innym wyróżnionym jest $[(2,1)] = 1$

$[(2,1)] + [(2,1)] = [(4,2)] = [(3,1)]$ $1+1=2$

$[(2,1)] + [(2,1)] + [(2,1)] = [(6,3)] = [(4,1)]$ $1+1+1=3$

$$\underbrace{[(2,1)] + \ldots + [(2,1)]}_{n} = [(2n,n)] = [(2n-n+1,1)] =$$
$$= [(n+1,1)] \qquad \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n} = n$$

Własności są ok, skonstruowaliśmy prawdziwe $\mathbb{Z}$.

LICZBY RZECZYWISTE:

$\mathbb{N}$ - dane przez Boga, moce zbiorów skończonych; $\mathbb{Z}$ - skonstruowaliśmy przed chwilą, $\mathbb{Q}$ - da się skonstruować z $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ jako klasy abstrakcji odpowiedniej relacji $\rightarrow$ można zrobić na ćwiczeniach. $\mathbb{R}$ - liczby rzeczywiste też da się skonstruować, na razie znamy dwa sposoby, ale pominiemy to w wykładzie, bo wszystkiego zrobić się nie da. Przyjrzymy się za to strukturze zbioru $\mathbb{R}$

1. $\mathbb{R}$ jest ciałem: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ← mnożenie

dodawanie

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\cdot \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ } działanie przemienne

$(\mathbb{R}, +)$

+ jest łączne $(x+y)+z = (x+(y+z))$
istnieje element neutralny 0: $0+x = x+0$
istnieje element przeciwny $\forall x\ \exists y : x+y=0$

$y =: -x$

GRUPA!

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

- $\cdot$ jest łączne ← obowiązuje dla całego $\mathbb{R}$
- istnieje element neutralny $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
- istnieje element odwrotny $\forall x\ \exists y : x \cdot y = 1$

$y = \frac{1}{x}$

TEŻ GRUPA

$\forall x, y, z \quad x(y+z) = xy + xz$

Rozdzielność mnożenia względem dodawania

Konsekwencje aksjomatów ciała powinny być dyskutowane na algebrze, np

$1 \cdot (x+0) = 1 \cdot x + 1 \cdot 0 = x + 1 \cdot 0 \to 1 \cdot 0 = 0$

$\| \quad 1 \cdot x \quad \| \quad x$

$x \cdot 0 = x(y + (-y)) = xy + x(-y) = 0$

itd.

(2.) **$\mathbb{R}$ jest ciałem uporządkowanym**, tzn istnieje podzbiór $\mathbb{R}_+$ mający własności

$$\mathbb{R}_+ \cap (-\mathbb{R}_+) = \emptyset$$

$A \subset \mathbb{R}$
$-A = \{-a : a \in A\}$

$$\mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \{-\mathbb{R}_+\} = \mathbb{R}$$

$$x, y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}_+, \; x \cdot y \in \mathbb{R}_+$$

Zbiór $\mathbb{R}_+$ pozwala wprowadzić relację $<$

$$x < y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$$

$$x \leq y \iff x < y \text{ lub } x = y$$

$\leq$ ma własności:

(1) antysymetryczna tzn $x \leq y$ i $y \leq x \Rightarrow x = y$

(2) przechodnia $x \leq y$ i $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(3) $\forall x, y$ mamy $x \leq y$ lub $y \leq x$

(1)+(2) - częściowy porządek

(1)+(2)+(3) liniowy porządek.

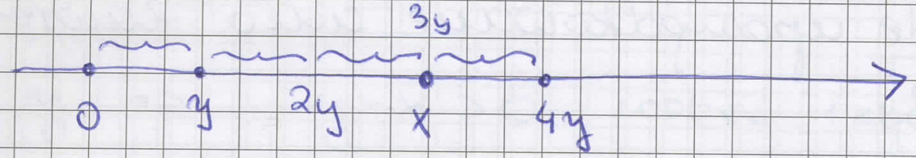
W ciele $\mathbb{R}$ mamy liniowy porządek.

(3) **Aksjomat Archimedesa**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+ \quad \exists n \in \mathbb{N}$$

$$\text{tż} \quad x < ny$$

tzn. idąc wystarczająco długo krokami długości y miniemy ustalone x



(4) **Aksjomat zupełności**: Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą dwoma ciągami o następującej własności

(x_n) jest rosnący: $\forall n \quad x_{n+1} \geq x_n$

(y_n) jest malejący $\forall n \quad y_{n+1} \leq y_n$

oraz

$\forall n \quad x_n \leq y_n$

Wówczas istnieje liczba rzeczywista r taka, że $\forall n \quad x_n \leq r \leq y_n$

TWIERDZENIE (bez dowodu) Ciało $\mathbb{R}$ jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu. Tzn. jeśli ~~dwa ciała~~ istnieje ciało $\mathbb{K}$ spełniające (1) - (4) to istnieje $\varphi: \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ bijekcja zachowująca działania i porządek.