30

Zauważmy, że $\mathbb{Q}$ spełnia wszystko z wyjątkiem zupełności. Można pokazać, że każde uporządkowane ciało zawiera ciało $\mathbb{Q}$.

<u>FAKT</u>: Wykazać, że aksjomatów ①-④ wynika prawo skracania

$$\alpha \geq \beta \Rightarrow \forall x \quad \alpha + x \geq \beta + x$$

$$\alpha \geq \beta \Rightarrow \forall x \geq 0 \quad \alpha \cdot x \geq \beta \cdot x$$

DOWÓD

$\alpha \geq \beta$ oznacza $\alpha = \beta$ lub $\alpha > \beta$

$\alpha = \beta + zu$

$\alpha - \beta = 0$

$\underbrace{\alpha - \beta}_{0} + \underbrace{(x - x)}_{0} = 0$

$\alpha + x - (\beta + x) = 0$

$\alpha + x = \beta + x$

$\alpha - \beta \in \mathbb{R}_+$

$\alpha - \beta + \underbrace{(x - x)}_{0} \in \mathbb{R}_+$

$\alpha + x - (\beta + x) \in \mathbb{R}_+$

$\alpha + x > \beta + x$

z mnożeniem jest tak samo → samodzielnie

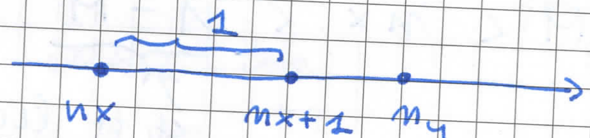
<u>FAKT</u>: Między dwie liczby rzeczywiste można wstawić liczbę wymierną. Bardziej precyzyjnie – jeśli $x, y \in \mathbb{R}$: $x < y$ to istnieje liczba $q \in \mathbb{Q}$ taka, że $x < q < y$.

DOWÓD: Fakt ten wynika z uporządkowania $\mathbb{R}$ i z własności Archimedesa

$x < y \Rightarrow y - x > 0$ wobec tego istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie że $n(y-x) > 1$

tzn $ny - nx > 1$

$ny > nx + 1$



W odcinku nx do ny zawarta jest przynajmniej jedna liczba całkowita. Trzeba ją tylko znaleźć. Z aksjomatu Archimedesa wynika że istnieje ~~M~~ m takie że $m \cdot 1 > nx$

jeśli $x > 0$ to dalej jest łatwo, bo bierzemy zbiór wszystkich liczb m spełniających ten warunek i wybieramy najmniejszą z nich, którą oznaczamy M, wtedy

$M - 1 < nx < M$

uwaga o tym że takie M istnieje → indukcja → ćwiczenie

wówczas

$nx < M$

$M < nx + 1$

$nx < M < nx + 1 < ny$

$x < \underset{\overset{\shortparallel}{q}}{\frac{M}{n}} < y$

32

jeśli $x < 0$ wtedy istnieje

m: $m > -nx$ i istnieje

także najmniejsze takie m, które oznaczymy M. Wtedy

$M - 1 < -nx < M$

$-M < nx < \underbrace{1 - M}$

tę liczbę oznaczamy K, $K \in \mathbb{Z}$

$K = 1 - M \Rightarrow -M = K - 1$

$K - 1 < nx < K$ i dalej tak samo jak poprzednio, tzn.

$nx < K < nx + 1 < ny$

$nx < K < ny$

$x < \frac{K}{n} < y$

q.

∎

Co wynika z aksjomatu zupełności?
W dalszym ciągu mówić będziemy o podzbiorach liczb rzeczywistych, tzn $A, B, X \ldots \subset \mathbb{R}$

Mówimy że zbiór A jest ograniczony z góry jeśli istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że
$$\forall a \in A \quad a \leq M$$
Zbiór A jest ograniczony z dołu jeśli istnieje $m \in \mathbb{R}$ takie, że
$$\forall a \in A \quad a \geq m$$
Zbiór A jest ograniczony jeśli jest ograniczony z dołu i z góry.

Liczby M takie że $\forall a \in A \quad a \leq M$ nazywamy ograniczeniami górnymi a liczby m takie że $\forall$ ~~m~~ $a \in A \quad a \geq m$ ograniczeniami dolnymi zbioru A.

Kresem górnym zbioru A ograniczonego z góry nazywamy najmniejsze ograniczenie górne, tzn liczbę M_0 taką, że jest ona ograniczeniem górnym zbioru A oraz dla każdego innego ograniczenia M zachodzi $M_0 \leq M$. Podobnie kresem dolnym zbioru A nazywamy największe ograniczenie dolne. Oczywiście ta definicja nie gwarantuje nam istnienia kresów. Zbiór ograniczeń górnych może (być może ?) nie mieć elementu najmniejszego. Tak na przykład jest w ciele $\mathbb{Q}$. Jeśli rozważymy zbiór $P \subset \mathbb{Q}$

$$P = \{ q : \quad q^2 < 2 \}$$

stwierdzimy, że P jest ograniczony z góry i z dołu oraz, że w zbiorze $\mathbb{Q}$ nie ma on kresów górnego i dolnego. Wszystkie liczby wymierne $> \sqrt{2}$ są ograniczeniem górnym i ~~te~~ wśród tych liczb nie ma najmniejszej. W zbiorze $\mathbb{R}$ mamy twierdzenie

TWIERDZENIE: każdy niepusty ograniczony z góry ~~zbio~~ podzbiór $\mathbb{R}$ ma kres górny. Podobnie każdy ograniczony z dołu ma kres dolny.

Zanim udowodnimy twierdzenie wprowadźmy oznaczenie

kres górny = supremum – $\sup A$

kres dolny = infimum = $\inf A$

Może się zdarzyć że $\sup A \in A$, wtedy czasami mówi się maksimum ($\max A$) podobnie jeśli $\inf A \in A$ mówimy minimum A i piszemy $\min A$ (nieobligatoryjnie) ad 35

DOWÓD: Dowód przeprowadzimy dla supremum, tzn bierzemy A ograniczony z góry i dowodzimy istnienia sup A.

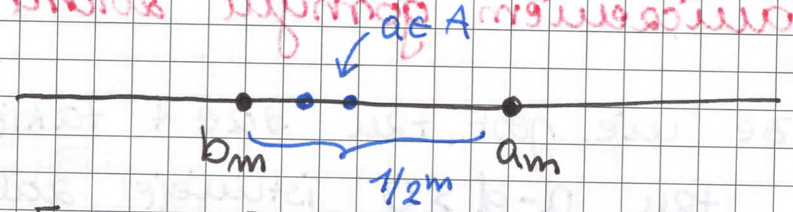
Ustalmy $a_0 \in A$ i ustalmy $m \in \mathbb{N}$. Z aksjomatu Archimedesa istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że $a_0 + k \cdot \frac{1}{2^m}$ jest ograniczeniem górnym zbioru A. W zbiorze wszystkich k spełniających ten warunek istnieje element najmniejszy k_0 (bo każdy niepusty podzbiór $\mathbb{N}$ go ma). Oznaczymy

$$a_m = a_0 + k_0 \frac{1}{2^m}$$

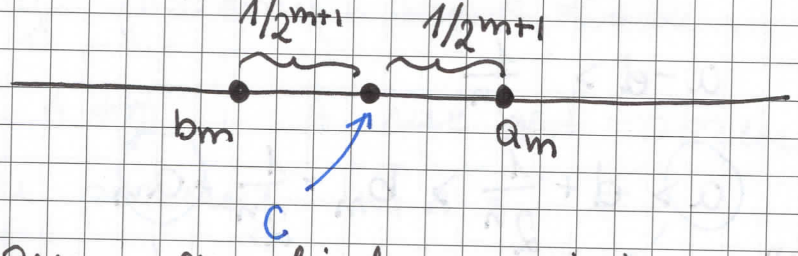
ograniczenie górne A

$$b_m = a_0 + (k_0 - 1)\frac{1}{2^m}$$

to nie jest ograniczenie górne A



Odcinek $[b_m, a_m]$ dzielimy na pół



Sprawdzamy, czy liczba c jest ograniczeniem górnym

TAK $\rightarrow$ $a_{m+1} = c$, $b_{m+1} = b_m$

NIE $\rightarrow$ $b_{m+1} = c$, $a_{m+1} = a_m$

⊕

36

Dalej znowu dzielimy na dwie części odcinek $[a_{m+1}, \cancel{b}\, a_{m+1}]$ itd konstrukcję ciągi $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$. O tych ciągach wiadomo, że elementy (a_m) to ograniczenie górne A, (a_m) jest nierosnący. Elementy (b_m) nie są ograniczeniami górnymi A i (b_m) jest niemalejący.
Wiadomo także, że $\forall m$

$$b_m \le b_{m+1} < a_{m+1} \le a_m$$

oraz $a_{m+1} - b_{m+1} = \frac{1}{2^{m+1}}$

Z aksjomatu zupełności wynika istnienie takiego $d \in \mathbb{R}$, że dla wszystkich m

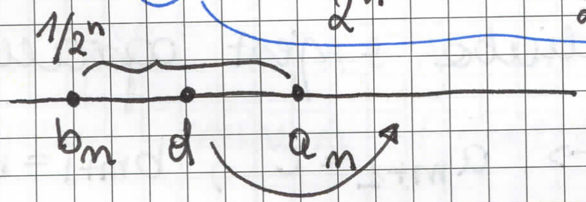
$$b_m < d < a_m.$$

d jest ograniczeniem górnym zbioru A.

Załóżmy, że nie jest, tzn $\exists a \in A$ takie że $d < a$ tzn $a - d > 0$ istnieje zatem n takie, że $2^n(a-d) > 1$

$$a - d > \frac{1}{2^n}$$

$$a > d + \frac{1}{2^n} > b_n + \frac{1}{2^n} = a_n$$



$$a > a_n$$

Sprzeczne z faktem iż a_n jest ograniczeniem górnym d jest najmniejszym ograniczeniem górnym

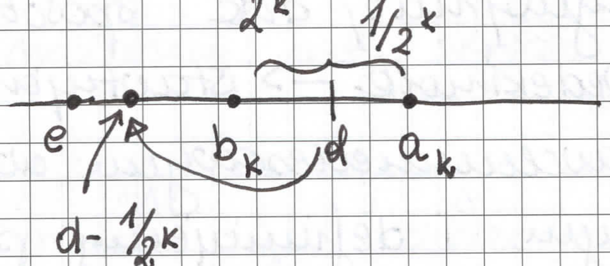
załóżmy, że ~~najmniejsze ∞~~ istnieje mniejsze ograniczenie górne, oznaczmy je e

$e < d$

$d - e > 0 \qquad 2^k(d-e) > 1 \qquad d - e > \frac{1}{2^k}$

$d > e + \frac{1}{2^k} \qquad -e > -d + 1/2^k$

$e < d - \frac{1}{2^k}$



$\Rightarrow e < b_k$ zatem e nie może być ograniczeniem górnym.

d jest kresem górnym zbioru A. ■

KONWENCJE:

- Jeśli $A \neq \emptyset$ i A nie jest ograniczony z góry piszemy $\sup A = +\infty$
- Jeśli $A \neq \emptyset$ i A nie jest ograniczony z dołu piszemy $\inf A = -\infty$
- $\sup \emptyset = -\infty$
- ~~∞~~ $\inf \emptyset = +\infty$

DYGRESJA:

Badając pojęcie relacji równoważności stwierdziliśmy, że startując z $\mathbb{N}$ można skonstruować $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Następnie $\mathbb{R}$ podaliśmy w formie aksjomatycznej. Tak jest wygodniej z punktu widzenia wykładu, natomiast warto wiedzieć, że istnieje sposób skonstruowania $\mathbb{R}$. Przypomnijmy dwa sposoby.

(1) Przekroje Dedekinda $\rightarrow$ startujemy z $\mathbb{Q}$, które jest archimedesowym ciałem uporządkowanym i definiujemy pojęcie przekroju, tzn. podziału $\mathbb{Q}$ na dwie dopełniające się części $\rightarrow$ CZYTAĆ W RUDINIE

$\cdots\cdots\cdot|\cdots\cdots\cdot$

Niektóre z nich są wyznaczane przez liczbę wymierną $\{x : x \leq q\}$, $\{x : x > q\}$ a niektóre nie! Każdemu przekrojowi odpowiada liczba rzeczywista.

(2) Klasy równoważności ciągów liczb wymiernych mających tzw. własność Cauchy'ego $\rightarrow$ o tym później.

CIĄGI LICZB RZECZYWISTYCH

Pojęcia ciągu używaliśmy już wcześniej posługując się intuicją. Teraz nasze intuicje sformalizujemy.

DEFINICJA Niech X będzie zbiorem. Odwzorowanie $x: \mathbb{N} \longrightarrow X$ nazywamy ciągiem elementów z X. Zgodnie z tradycją zmieniamy oznaczenie. Zamiast $x: \mathbb{N} \longrightarrow X$ piszemy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lub $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Zamiast $x(n)$ piszemy x_n mając na myśli wartość x w punkcie n. O tej wartości mówimy n-ty wyraz ciągu.

W dalszym ciągu mówimy o ciągach liczb rzeczywistych, czyli odwzorowaniach $x: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Zanim zajmiemy się badaniem konkretnych ciągów musimy wyprodukować sobie pewien słownik. ~~Ten st~~

Mówimy że ciąg jest ograniczony jeśli zbiór jego wyrazów $\{x_1, x_2, \dots\}$ jest ograniczony. Wyróżniamy ciągi ograniczone z dołu, z góry albo ograniczone z obu stron.

Mówimy że ciąg jest malejący jeśli

$$\forall n \quad x_{n+1} < x_n$$

rosnący jeśli $\forall n \quad x_{n+1} > x_n$.

Mówimy że ciąg jest niemalejący jeśli $\forall n \quad x_{n+1} \geq x_n$ i nierosnący jeśli $\forall n \quad x_{n+1} \leq x_n$. Ciągi rosnące, malejące, nierosnące, niemalejące określamy wspólną nazwą monotoniczne

DEFINICJA Granicą ciągu (x_n) nazywamy liczbę $g \in \mathbb{R}$ taką, że

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \quad |g - x_n| < \varepsilon$$

Inaczej mówiąc, mniej formalnie, w odcinku $]g-\varepsilon, g+\varepsilon[$ znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu

prawie wszystkie oznacza wszystkie poza skończoną liczbą. Je

Jeżeli ciąg (x_n) ma granicę $g \in \mathbb{R}$ to mówimy że jest zbieżny do g co oznaczamy

$$g = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Używamy także oznaczeń

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N: \ \forall n > N \quad x_n > M$

„ciąg dąży do nieskończoności"

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \quad x_n < M$

„... dąży do $-\infty$"