TWIERDZENIE: Jeśli (x_n) ma granicę, to jest ona wyznaczona jednoznacznie

DOWÓD: Załóżmy, że istnieją g i g' takie, że $\lim_{n\to\infty} x_n = g$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = g'$. Wtedy, ustalamy $\varepsilon > 0$ i mamy dla ~~dla~~ N i N' takie, że $\forall n > N \ |g - x_n| < \varepsilon$ i $\forall n > N' \ |g' - x_n| < \varepsilon$

Biorąc $n > \max\{N, N'\}$ otrzymujemy:

$$|g - g'| \leq |g - x_n| + |x_n - g'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Okazuje się więc, że $\forall \varepsilon > 0 \ |g - g'| < \varepsilon$, ale to znaczy $g = g'$ ■

Większość pracy, którą wykonuje się nad ciągami polega na badaniu ich zbieżności. Korzystanie z definicji jest jednak kłopotliwe, dlatego posługiwać się będziemy rozmaitymi pożytecznymi twierdzeniami.

Zauważmy przede wszystkim, że zachodzi pożyteczny fakt

FAKT: Ciąg zbieżny jest ograniczony.

DOWÓD: Istotnie, jeśli g jest granicą (x_n) to dla ustalonego $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu należą do $]-\varepsilon + g, g + \varepsilon[$. Jedynie skończona liczba $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ⊕

42

być może do tego zbioru nie należy: ze zbioru skończonego $\{x_1, \dots, x_N\}$ wybierzmy element najmniejszy x_{m_0} i największy x_{m_1} a następnie połóżmy

$$R = \max\{g+\varepsilon, x_{m_1}\}$$

$$r = \min\{g-\varepsilon, x_{m_0}\}$$

mamy wtedy

$$\{x_1, x_2, \dots, x_N, \dots, \dots\} \subset [r, R]$$

zatem ciąg jest ograniczony ■

Oczywiście twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Łatwo podać przykład ciągu, który nie jest zbieżny i jest ograniczony, np

$$x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

Wiadomo jednak, że ciągów zbieżnych należy poszukiwać wśród ciągów ograniczonych.

TWIERDZENIE (o ciągach monotonicznych i ograniczonych) Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny

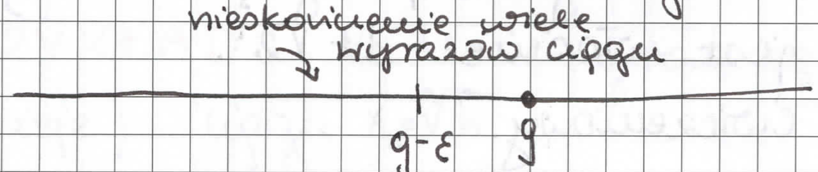
DOWÓD: Ciągi monotoniczne dzielą się na niemalejące i nierosnące. Dla każdej grupy dowód robić trzeba oddzielnie. Dowody są podobne. Wybierzmy więc ciągi niemelejące i ograniczone. Pokażmy, że są zbieżne. Niech więc (x_n) będzie ciągiem niemalejącym i ograniczonym. Niemalejący, więc ~~liczba~~ $\forall n \quad x_{n+1} \geq x_n$. Ograniczony więc $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ jest ograniczony. Niech $g = \sup\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Pokażemy, że g jest granicą ciągu (x_n). Dowód e.e.

Zauważmy po pierwsze, że $\forall n \quad x_n \leq g$. Zapiszmy zaprzeczenie warunku granicy

$$\sim\left(\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N \quad |g-x_n|<\varepsilon\right)$$

$$\equiv \left(\exists \varepsilon>0\ \forall N\ \exists n>N \quad |g-x_n|\geq \varepsilon\right.$$

po ludzku istnieje taka dodatnia liczba ε, że ~~w~~ poza odcinkiem $]\cancel{x_n}\, g-\varepsilon, g+\varepsilon[$ jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu.



Ale nasz ciąg jest niemalejący. Oznacza to, że jeśli jeden wyraz jest w odcinku $]g-\varepsilon, g]$ to wszystkie z indeksami większymi od niego tam są! zatem w odcinku $]g-\varepsilon, g]$ nie ma żadnego wyrazu ciągu. No ale wtedy g nie jest $\sup\{x_1, \dots\}$ bo to supremum musi być $\leq g-\varepsilon$. Sprzeczność!

Udowodniliśmy zatem nie wprost, że niemalejący i ograniczony ciąg jest zbieżny do granicy będącej supremum zbioru wyrazów ciągu. Dla nierosnącego należy zrobić podobnie: nierosnący ma granicę będącą infimum zbioru wyrazów.

PRZYKŁAD: Teraz już moglibyśmy udowodnić że ciąg

$$z_n = \frac{5z_{n-1}+2}{2z_{n-1}+1} \qquad z_1 = 5/2$$

jest dobrym przybliżeniem $1+\sqrt{2}$ z góry. Pokażujemy, że

(1) (z_n) jest malejący
(2) z_n jest ograniczony
(3) wnioskujemy, że z_n jest zbieżny
(4) uzasadniamy, że jedyną możliwą granicą jest właśnie $1+\sqrt{2}$.

→ materiał ćwiczeniowy.

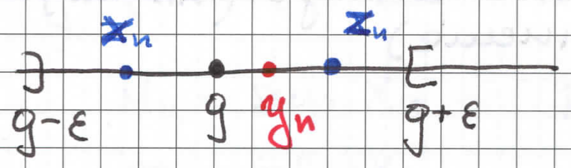
TWIERDZENIE o trzech ciągach Niech (x_n), (y_n) (z_n) będą trzema ciągami takimi, że $\forall n \; x_n \leq y_n \leq z_n$. Niech ponadto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = g$

Wówczas także $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = g$

DOWÓD: Z definicji granicy: ustalmy $\varepsilon>0$ i weźmy N_x i N_z takie, że $\forall n>N_x \; |x_n-g|<\varepsilon$ i $\forall n>N_z \; |z_n-g|<\varepsilon$

Wiemy wtedy, że $\forall\, n > \max\{N_x, N_z\}$

$$|x_n-g|<\varepsilon \quad \text{i} \quad |z_n-g|<\varepsilon$$



tzn. $x_n > g-\varepsilon \qquad z_n < g+\varepsilon$

$$g-\varepsilon < x_n < y_n < z_n < g+\varepsilon$$

$\Rightarrow |z_n-g|<\varepsilon$

■

Dwa udowodnione przez nas przed chwilą twierdzenia nadają się do badania bardzo wielu ciągów.

PRZYKŁAD: Znaleźć granicę (jeśli istnieje) ciągu $x_n=\sqrt[n]{n}$

~~$x_n = \sqrt[n]{n}$ oznaczmy $y_n = 1+x_n = 1+\sqrt[n]{n}$~~

~~wtedy $\sqrt[n]{n} =$~~

46

$x_n = \sqrt[n]{n}$ Oznaczmy $y_n = \sqrt[n]{n} - 1$

wtedy $\sqrt[n]{n} = y_n + 1 \quad |^n$

$$n = (y_n+1)^n \geq 1 + ny_n + \binom{n}{2} y_n^2$$

niev. Bernoulliego (niemal)
(ćwiczenie)

$$\geq 1 + \binom{n}{2} y_n^2$$

$$n \geq 1 + \binom{n}{2} y_n^2$$

$$n-1 \geq \frac{n(n-1)}{2} y_n^2$$

$$1 \geq \frac{n}{2} y_n^2$$

$$\frac{2}{n} \geq y_n^2 \quad \text{ale } y_n > 0$$

zatem $\sqrt{\frac{2}{n}} \geq y_n \geq 0$

$\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, wynika stąd, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

Pokazaliśmy

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

rzecz którą należy wiedzieć!

UWAGA: POJĘCIA TRUDNE ALE POTRZEBNE

DEFINICJA Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem rzeczywistym. Niech X_n oznacza zbiór

$$X_n = \{x_k : k \geq n\}$$

czyli zbiór wyrazów ciągu o indeksach powyżej n (razem z n)

$$M_n = \sup X_n \qquad M_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$m_n = \inf X_n \qquad m_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Granicą górną ciągu (x_n) limes superior nazywamy liczbę

$$\limsup x_n = \cancel{\inf_{n\in\mathbb{N}} \{M_n\}} \inf\{M_n : n\in\mathbb{N}\}$$

Granicą dolną ciągu x_n limes inferior nazywamy liczbę

$$\liminf x_n = \cancel{\sup_{n\in\mathbb{N}} \{} \sup\{m_n : n\in\mathbb{N}\}$$

lim sup i lim inf zawsze istnieją (inaczej niż granica lim) i mogą być liczbami rzeczywistymi lub $+\infty, -\infty$

lim inf i lim sup to dosyć skomplikowane pojęcia, spróbujemy się do nich trochę przybliżyć.

⊕

ZAPOMNIANE TWIERDZENIE – operacje na ciągach zbieżnych:

Niech $(x_n), (y_n)$ będą ciągami zbieżnymi.

Niech także $g = \lim_{n\to\infty} x_n$, $h = \lim_{n\to\infty} y_n$

(1) dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ciąg $\alpha x_n + \beta y_n$ jest ciągiem zbieżnym i $\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha g + \beta h$.

(2) $x_n y_n$ jest ciągiem zbieżnym i $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = g \cdot h$

(3) jeśli $h \neq 0$ i $y_n \neq 0$ to $\frac{x_n}{y_n}$ jest ciągiem zbieżnym i $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{g}{h}$.

DOWÓD: (1) – bardzo łatwe – niech ε będzie dowolną liczbą >0, ustalmy N_x i N_y jak w definicji zbieżności i weźmy $n > \max\{N_x, N_y\}$

$$|\alpha x_n + \beta y_n - (\alpha g + \beta h)| = |\alpha(x_n - g) + \beta(y_n - h)| \leq$$

$$\leq |\alpha||x_n - g| + |\beta||y_n - h| \leq (|\alpha| + |\beta|) \cdot \varepsilon$$

ponieważ $|\alpha| + |\beta|$ jest ustaloną liczbą, wybierając odpowiednio małe ε możemy uczynić liczbę $(|\alpha| + |\beta|) \cdot \varepsilon$ dowolnie małą.

(2) zanim zapiszemy dowód w ostatecznej formie zróbmy analizę. Musimy umieć oszacować $|x_n y_n - g \cdot h|$ znając

oszacowania $|x_n - g|$ i $|y_n - h|$ Rachunek pomocniczy

$$x_n y_n - gh = x_n y_n - g y_n + g y_n - gh =$$

$$= (x_n - g) y_n + g(y_n - h)$$

znany oszacowanie

znany oszacowanie

ciąg y_n jest zbieżny, a więc ograniczony

jeśli weźmiemy $|(x_n - g)|$, $|y_n - h| < \varepsilon$
$|y_n| < M$ dostaniemy

$$|y_n x_n - gh| \leq |y_n||x_n - g| + |g||y_n - h| < (M + |g|)\varepsilon$$

Żeby było elegancko dowód możemy zapisać na przykład tak:

Ustalmy $\varepsilon > 0$, oznaczmy przez M kres górny zbioru wartości bezwzględnych wyrazów ciągu (y_n) i.e. $M = \sup\{|y_1|, |y_2| \dots\}$ Ze zbieżności ciągów (y_n) i (x_n) wynika że dla wystarczająco dużych n mamy

$$|x_n - g| < \frac{\varepsilon}{(M + |g|)} \text{ i } |y_n - g| < \frac{\varepsilon}{(M + |g|)}$$

Dla takich n mamy

$$|y_n x_n - gh| \leq |y_n||x_n - g| + |g||y_n - h| \leq M|x_n - g| + |g||y_n - h| \leq M \frac{\varepsilon}{(M + |g|)} + |g| \frac{\varepsilon}{(M + |g|)} = \varepsilon$$

⊕

BA 50

(3) W tym przypadku też trzeba najpierw „po cichu" policzyć tak, żeby na końcu wyszło ładnie:

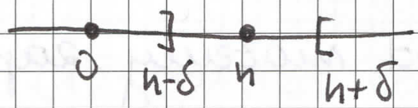
$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{g}{h}=\frac{h\cdot x_n - y_n g}{h\cdot y_n}=\frac{h\cdot x_n - gh + gh - y_n g}{h\cdot y_n}=$$

$$=\frac{1}{h\cdot y_n}\Big(h(x_n-g)+g(h-y_n)\Big)$$

??

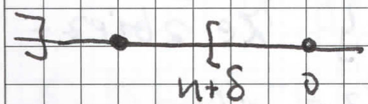
da się opracować

ciąg (y_n) jest zbieżny do liczby $h\neq 0$. Oznacza to że dla dużych n wyrazy ciągu (y_n) leżą w pobliżu h. Weźmy $\delta>0$



i takie że $0\notin[h-\delta, h+\delta]$ ~~Prawo Ustalmy~~

Znajdźmy N takie że y_{N+1} i dalsze wyrazy (y_n) są w odcinku $]h-\delta, h+\delta[$. Wiemy wtedy, że dla $n>N$ $|y_n|> \cancel{h/\delta}\ \min\{|h-\delta|, |h+\delta|\}$



poza odcinkiem jest skończona liczba elementów ciągu weźmy

$$m=\min\{|y_1|,|y_2|,\dots,|y_N|,|h-\delta|,|h+\delta|\}$$

$m\neq 0$ $m>0$

~~|A~~ $|y_n|>m \Rightarrow \frac{1}{|y_n|}<\frac{1}{m}$

teraz już możemy szacować

$$\frac{1}{|h||y_n|}\left(|h|\underbrace{|x_n-g|}_{<d}+|g|\underbrace{|h-y_n|}_{<d}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{|h|m}\left(|h|+|g|\right)d$$

Teraz jeśli ustalimy $\varepsilon>0$ i weźmiemy n na tyle duże aby

$\rightarrow \quad |x_n-g| < \dfrac{\varepsilon\cdot|h|\cdot m}{|h|+|g|}$

$\rightarrow \quad |y_n-g| < \dfrac{\varepsilon\cdot|h|\cdot m}{|h|+|g|}$

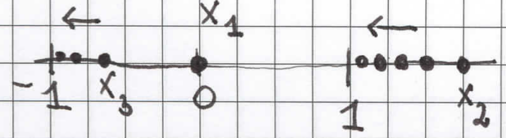
$\rightarrow \quad y_n \in \,]h-\delta, h+\delta[$

otrzymamy oszacowanie $\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\dfrac{g}{h}\right|<\varepsilon$ ■

Możemy teraz wrócić do kwestii granicy górnej lub dolnej. Najpierw kilka przykładów

$x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

$x_1=0$	$M_1=3/2$	$m_1=-1$
$x_2=\frac{3}{2}$	$M_2=3/2$	$m_2=-1$
$x_3=-\frac{2}{3}$	$M_3=5/4$	$m_3=-1$
$x_4=\frac{5}{4}$	$M_4=5/4$	$m_4=-1$
$x_5=-\frac{4}{5}$	$M_5=7/6$	$m_5=-1$
$x_6=\frac{7}{6}$	$M_6=7/6$	$m_6=-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



$\limsup x_n = 1$

$\liminf x_n = -1$