DEFINICJA **punktem skupienia** ciągu (x_n) nazywamy liczbę rzeczywistą h taką, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ w odcinku $]-\varepsilon+h, \varepsilon+h[$ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N : \ |x_n - h| < \varepsilon .$$

Oczywiście granica, jeśli istnieje, jest punktem skupienia ciągu. W przykładzie który rozważaliśmy wcześniej $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ są dwa punkty skupienia -1 i $+1$.
Istnieją ciągi, które mają wiele punktów skupienia, nawet takie, których punkty skupienia wypełniają odcinek.

DEFINICJA: Niech $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie odwzorowaniem rosnącym (ściśle) oraz niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem. **Podciągiem** ciągu (x_n) nazywamy ciąg (y_n) zdefiniowany wzorem $y_n = x_{\varphi(n)}$. W praktyce oznacza to że podciąg zawiera niektóre wyrazy ciągu, nieskończenie wiele spośród nich, w takim porządku w jakim występowały one w wyjściowym ciągu. Analizując przykład $(x_n) = (-1)^n + \frac{1}{n}$ rozważaliśmy dwa podciągi - wyrazów parzystych i wyrazów nieparzystych $y_n = x_{2n}$ i

$z_n = x_{2n-1}$

FAKT: Punkt skupienia ciągu jest granicą pewnego podciągu.

DOWÓD Istotnie: skonstruujemy ten podciąg używając $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Weźmy punkt skupienia h i $\varepsilon = 1$. Znajdźmy element ciągu taki, że należy on do odcinka $]h-1, h+1[$. Indeks tego wyrazu oznaczymy $\varphi(1)$. Teraz weźmy $\varepsilon = \frac{1}{2}$, znajdźmy wyraz ciągu taki, że jego indeks jest większy od $\varphi(1)$ i wyraz należy do $]h-\frac{1}{2}, h+\frac{1}{2}[$. Postępujemy tak dalej, tzn. $\varphi(k)$ oznacza indeks wyrazu ciągu większy od $\varphi(k-1)$ i taki że $x_{\varphi(k)} \in]h-\frac{1}{k}, h+\frac{1}{k}[$. Ciąg $y_k = x_{\varphi(k)}$ jest podciągiem ciągu (x_n). Jest też w sposób oczywisty zbieżny do h.

Jak to się wszystko ma do granicy górnej i dolnej? Przede wszystkim ~~rozpatrzmy~~ rozszerzmy pojęcie punktu skupienia tak, żeby ~~a~~ użyć $\pm\infty$.

Powiemy że $+\infty$ jest punktem skupienia ciągu jeśli zbiór wyrazów ciągu nie jest ograniczony z góry.
Podobnie powiemy, że $-\infty$ jest ... jeśli zbiór wyrazów ciągu ... z dołu.

Możemy teraz powiedzieć, że granica górna ciągu to supremum zbioru punktów skupienia tego ciągu a granica dolna to infimum zbioru punktów skupienia. Przy czym supremum i infimum są osiągane, tzn granice dolna i górna same są punktami skupienia ciągu.

Fakt powyższy udowodnimy dla granicy górnej. Jeśli ciąg jest nieograniczony z góry to z definicji $+\infty$ jest jego punktem skupienia, oczywiście największym. Czy $+\infty$ jest granicą górną? Weźmy (x_n) nieograniczony z góry. Z definicji

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ takie że } x_N > M$$

~~oznacza to, że sup~~ $\cancel{\underbrace{X_N}_{M_N} \geq M}$

Oznacza to, że każdy ze zbiorów X_n zawiera dowolnie dużą liczbę. Zatem $M_n = +\infty$ dla każdego n wtedy oczywiście $\limsup x_n = +\infty$

Rozważmy teraz ciąg ograniczony z góry. Zbiór $\{M_n\}$ też jest więc ograniczony z góry. Mogą się zdarzyć dwie rzeczy:

55

zbiór $\{M_n\}$ jest ograniczony z dołu, albo zbiór $\{M_n\}$ nie jest ograniczony z dołu. Rozważymy te przypadki oddzielnie.

I $\{M_n\}$ nie jest ograniczony z dołu. Wtedy $\inf\{M_n\} = \limsup x_n = -\infty$. Oraz $\forall m \in \mathbb{R}\ \exists n: M_n < r$

$\sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots\}$

Skoro $M_n < r$ to znaczy, że wszystkie wyrazy ciągu o indeksach większych niż n są mniejsze od r. to oznacza że $\lim x_n = -\infty$ i $-\infty$ jest punktem skupienia ciągu. Jednocześnie jest to jedyny punkt skupienia.

II $\{M_n\}$ jest ograniczony z dołu i z góry. Wtedy $\limsup x_n = \inf M_n$ jest liczbą rzeczywistą. Oznaczmy ją c. Pokażemy, że c jest ~~najmniejszym~~ największym punktem skupienia ciągu.

$\inf M_n = c$ oznacza $\rightarrow \forall n\ M_n \geq c$,

$\rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n: M_n \in [c, c+\varepsilon[$

~~Weźmy $\varepsilon = 1$ i znajdźmy $M_n \in [c, c+1[$~~
~~M_n jest równe $\sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ tak, że w odcinku $]M_n - 1, M_n[$ znajdzie się wyraz ciągu x_k dla $k > n$.~~

Zauważmy ponadto że (M_n) jest ciągiem ~~nie~~ nierosnącym. Istotnie, skoro $X_{n+1} \subset X_n$ to $\sup X_{n+1} \leq \sup X_n$ zatem $M_{n+1} \leq M_n$. Jeśli więc dla ustalonego $\varepsilon > 0$ weźmiemy N_ε: $M_{N_\varepsilon} \in [c, c+\varepsilon[$ to także wszystkie M_n dla $n > N_\varepsilon$ też leżą w tym odcinku. Konstruujemy podciąg ciągu (x_n) zbieżny do c. Weźmy $\varepsilon = 1$ znajdziemy $M_{N_1} \in [c, c+1[$

W zbiorze $\{x_{N_1+1}, x_{N_1+2}, \dots\}$ jest

wyraz ciągu taki, że $x_{N_1+k} \in]M_{N_1}-1, M_{N_1}]$

niech $\varphi(1) = N_{1+k}$. $\boxed{\text{wiadomo, że } x_{\varphi(1)} \in]c-1, c+1[}$

$\varepsilon = 1/2$ znajdziemy M_{N_2} takie, że $N_2 > N_{1+k}$ i $M_{N_2} \in [c, c+1/2[$ i w zbiorze $\{x_{N_2+1}, x_{N_2+2} \dots\}$ x_{N_2+l} takie, że

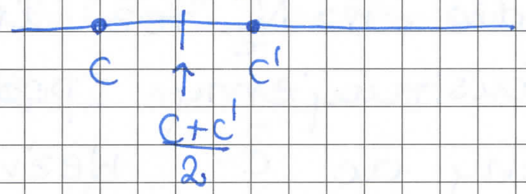
$x_{N_2+l} \in]M_{N_2} - 1/2, M_{N_2}]$ wiadomo, że ~~φ(~~

$\varphi(2) = N_{2+l}$ $\boxed{x_{\varphi(2)} \in]c-1/2, c+1/2[}$

biorąc kolejno $\varepsilon = 1/k$ i konstruując $\varphi(k)$ otrzymamy ciąg $x_{\varphi(k)}$ zbieżny do c.

W ten sposób pokazaliśmy, że $\limsup x_n$ jest granicą pewnego podciągu, czyli jest punktem skupienia. ⊕

Pozostaje wykazać, że $c = \limsup x_n$ jest największym punktem skupienia. Załóżmy, że istnieje większy $c' > c$ i c' jest punktem skupienia. Wtedy istnieje podciąg zbieżny do c' $x_{\varphi(n)}$



Istnieje $N: \forall n > N \quad M_N \in [c, \frac{c+c'}{2}[$
ale wtedy wszystkie wyrazy ciągu (x_n) z $n > N$ spełniają $x_n < \frac{c+c'}{2}$
co przeczy istnieniu podciągu zbieżnego do c'.

Dowód dla ~~infimum~~ limes inferior przebiega podobnie. ■

Zauważmy teraz, że ciąg zbieżny ma dokładnie jeden punkt skupienia i jest nim granica.
Wobec tego $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \limsup x_n = \liminf x_n$.

Podobnie, jeśli $\limsup x_n = \liminf x_n$ to znaczy że ciąg ma jeden punkt skupienia a to oznacza, że jest zbieżny.