DO OMÓWIENIA Pozostało jeszcze jedno zagadnienie z dziedziny ciągów rzeczywistych: Ciągi Cauchy'ego

DEFINICJA: Ciągiem Cauchy'ego nazywamy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniający warunek

$$(*)\ \forall \varepsilon>0\ \exists N:\ \forall m,n>N\ |x_n-x_m|<\varepsilon$$

UWAGA! Mówi się potocznie, że ciągi Cauchy'ego to takie, których dalekie wyrazy są położone blisko siebie. To prawda, ale pamiętać należy, że ważna jest formalna definicja a nie potoczna NIE JEST BOWIEM RÓWNOWAŻNE SFORMUŁOWANIE

$$(**)\ \forall \varepsilon>0\ \exists N:\ \forall n>N\ |x_n-x_{n+1}|<\varepsilon$$

Z warunku (*) wynika (**) ale NIE JEST ODWROTNIE!!!

TWIERDZENIE (Cauchy) (1) Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego. (2) W $\mathbb{R}$ każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny

DOWÓD:

(1) B. proste. Niech $\lim_{n\to\infty} x_n = g$ wówczas dla $\varepsilon>0$ i $n>N_{\varepsilon/2}$ mamy $|x_n-g|<\varepsilon/2$. Niech $n,m>N$

$$|x_n-x_m|\leq|x_n-g+g-x_m|\leq|x_n-g|+|g-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2=\varepsilon$$

59

(2) Dowód drugiej części twierdzenia jest trudniejszy. Zahacza bowiem o problem zupełności $\mathbb{R}$.

Zauważmy przede wszystkim, że ciąg Cauchy'ego jest ograniczony. Istotnie. Wybierzmy $\varepsilon > 0$ i N takie jak w warunku Cauchy'ego tzn

$m, n > N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$

w szczególności oznacza to że wszystkie wyrazy ciągu z indeksami większymi niż N zawarte są w odcinku $\left] x_{n+1} - \varepsilon, x_{n+1} + \varepsilon \right[$

Niech $m = \inf \{x_1, \dots, x_N, x_{n+1} - \varepsilon\} > -\infty$

$M = \sup \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1} + \varepsilon\} < \infty$

Jest jasne, że

$\{x_1, x_2, \dots\} \subset [m, M]$.

Skoro ciąg jest ograniczony to jego granice dolna i górna są skończonymi liczbami. Rozważmy ciągi M_n i m_n występujące w definicji ~~ciągu~~ ~~ciąg~~ granicy górnej i dolnej. Wiadomo, że $M_n = \sup \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2} \dots\}$

$m_n = \inf \{x_n, x_{n+1} \dots\}$

Spełniają $m_n \leq M_n$

Ponadto $M_{n+1} \leq M_n$ i $m_{n+1} \geq m_n$.

czyli

$$\forall n \quad m_{n} \leq m_{n+1} \leq M_{n+1} \leq M_n$$

Z aksjomatu zupełności wynika, że istnieje g: $m_n \leq g \leq M_n$ dla wszystkich ~~n~~ n. Naszym zadaniem będzie pokazać, że g jest jedyne.
Ustalmy $\varepsilon > 0$ i znajdźmy N jak w warunku Cauchy'ego, tzn.

$$\forall_{n, m > N} \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$

weźmy $\{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\}$ i

inf $\quad$ sup.

$$m_{N+1} \quad \text{i} \quad M_{N+1}$$

wiadomo że $\forall n > N+1 \quad |x_{N+1} - x_n| < \varepsilon$

zatem $m_{N+1} \geq x_{N+1} - \varepsilon$

$M_{N+1} \leq x_{N+1} + \varepsilon$

$$|M_{N+1} - m_{N+1}| < 2\varepsilon$$

Możemy więc znaleźć takie N że M_{N+1} i m_{N+1} różnią się o dowolnie małą liczbę. Wobec tego $g = \inf M_n = \sup m_n$ jest tylko jedno.

Pokazaliśmy że $\lim x_n = g$ ponieważ $\limsup x_n = \liminf x_n = g$. ∎

61

O KONSTRUKCJI $\mathbb{R}$. Posługując się pojęciem ciągu Cauchy'ego można skonstruować $\mathbb{R}$ z $\mathbb{Q}$ w inny sposób niż przez przekroje Dedekinda. Należy wziąć zbiór wszystkich ciągów Cauchy'ego liczb ~~rzeczywistych~~ wymiernych i wprowadzić w nim relację

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \quad |x_n - y_n| < \varepsilon$$

Klasy równoważności ciągów Cauchy'ego to nowy zbiór w którym należy zdefiniować działania i strukturę jak w $\mathbb{R}$. Taką konstrukcję nazywa się czasem uzupełnieniem $\mathbb{Q}$.

PRZYKŁAD CIĄGU Z DUŻĄ LICZBĄ PUNKTÓW SKUPIENIA:

$$x_n = \frac{n}{1+E(\sqrt{n})} - E(\sqrt{n})$$

$$n = k^2 + l \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, 2k$$

$$\uparrow$$

$$n(k,l)$$

$$x_{n(k,l)} = \frac{k^2+l}{1+k} - k = \frac{l-k}{1+k}$$

$\liminf x_n = -1 \quad \limsup x_n = 1$

Zbiór punktów skupienia ciągu to $[-1, 1]$

PRZYKŁADY RÓŻNE

Oznaczamy $e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

FAKT: (1) Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ istnieje granica $\lim_{n \to \infty} e_n(x)$. Granicę tę chwilowo oznaczymy $e(x)$

(2) $\forall x, x' \in \mathbb{R} \quad e(x + x') = e(x) + e(x')$

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad e(x) > 0 \quad e(x) \geq 1 + x$

(4) $x \longmapsto e(x)$ jest rosnąca

(5) $e := e(1) \qquad e(p/q) = e^{p/q}$

DOWÓD:

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ jest, od pewnego miejsca, rosnący. Dla wystarczająco dużych n liczba $1 + \frac{x}{n}$ jest dodatnia nawet jeśli $x < 0$.

$$\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left[\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right]^{n+1}$$

$$= \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left[\frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right]^{n+1} =$$

$$= \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left[1 + \frac{\frac{-nx - x + nx}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}}\right]^{n+1} =$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1-\frac{x/n(n+1)}{1+x/n}\right]^{n+1} \geq$$

$$\geq \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\cancel{(n+1)}\,\frac{\frac{x}{n\cancel{(n+1)}}}{1+x/n}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\frac{1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} = 1.$$

$$\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} \geq 1 \Rightarrow e_{n+1}(x) \geq e_n(x)$$

ciąg $e_n(x)$ jest niemalejący

$$e_n(x)\cdot e_n(-x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n$$

Dla wystarczająco dużych n mamy

$$0 \leq \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1.$$

tzn. $e_n(x)\cdot e_n(-x) \leq 1$

$$e_n(x) \leq \left[e_n(-x)\right]^{-1}$$

ale $e_n(-x)$ rosnący ~~ana~~ więc $\frac{1}{e_n(-x)}$ malejący zatem $e_n(x)$ jest ograniczony (oba są ograniczone)

z tw. o ciągach monotonicznych i ograniczonych wynika że $e_n(x)$ zbieżny.

Możemy więc zdefiniować funkcję
$e : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto e(x)$

Badamy dalej własności tej funkcji

(2)
$x, x' \in \mathbb{R}$ dla wystarczająco dużych n
$1+\frac{x}{n}$ i $1+\frac{x'}{n}$ są dodatnie, podobnie
$1+\frac{x+x'}{n}$

$1+\frac{x}{n}+\frac{x'}{n}+\frac{xx'}{n^2}$

$$\frac{e_n(x)\,e_n(x')}{e_n(x+x')} = \left[\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x'}{n}\right)}{1+\frac{x+x'}{n}}\right]^n =$$

$$= \left[1+\frac{\frac{xx'}{n^2}}{1+\frac{x+x'}{n}}\right]^n \geq 1+\frac{\frac{xx'}{n}}{1+\frac{x+x'}{n}}$$

$+\frac{xx'}{n^2}-\frac{xx'}{n^2}$

$$\frac{e_n(x+x')}{e_n(x)\,e_n(x')} = \left[\frac{1+\frac{x+x'}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x'}{n}\right)}\right]^n = \left[1-\frac{\frac{xx'}{n^2}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x'}{n}\right)}\right]^n$$

$$\geq 1-\frac{xx'/n}{\left(1+x/n\right)\left(1+x'/n\right)}$$

$$\underset{\substack{\big\downarrow\, n\to\infty \\ 1}}{1+\frac{\frac{xx'}{n}}{1+\frac{x+x'}{n}}} \leq \underbrace{\frac{e_n(x)\,e_n(x')}{e_n(x+x')}}_{\downarrow\; 1.} \leq \underset{\substack{\big\downarrow\, n\to\infty \\ 1}}{\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x'}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x'}{n}\right)-\frac{xx'}{n}}}$$

(3) $$e_n(x) = (1+x/n)^n \geq 1 + n\cdot\frac{x}{n} = 1+x$$

zatem to samo dla $e(x)$.

$$e(x)e(-x) = e(0) = 1.$$

zatem obie liczby są niezerowe i z całą pewnością jedna z nich jest dodatnia, wobec tego obie są dodatnie.

(4) Weźmy $x_1 < x_2$

$$e(x_2) = e(x_1 - x_1 + x_2) = e(x_1)\underbrace{e(x_2 - x_1)}_{x_2 - x_1 > 0} > e(x_1)$$

zatem $e(x_2 - x_1) > 1$

zatem $e(x_2) > e(x_1) \to e$ rosnąca

(5) Oznaczamy $e = e(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

wtedy

$$\to e(k) = e(\underbrace{1+\dots+1}) = e(1)^k = e^k \qquad k\in\mathbb{N}$$

$$e(-k) = e(k)^{-1} = e^{-k}$$

$$\underbrace{e\left(\frac{k}{m}\right)\cdot\ldots\cdot e\left(\frac{k}{m}\right)}_{m} = e^k$$

$$e(k/m) = (e^k)^{1/m} = e^{k/m}$$

Dla wymiernych argumentów $e(k/m) = e^{k/m}$
Dla niewymiernych w ogóle nie wiadomo co to jest funkcja potęgowa więc można przyjąć na przykład to za definicję i napisać
$$e^x = e(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

- to ma sens jeśli udowodnić się, że funkcja e jest ciągła. To zrobiliśmy innym razem.

Otto Stolz
1842 – 1905
Austria

TWIERDZENIE STOLZA

Niech $(x_n)_{\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami w $\mathbb{R}$. Niech także (y_n) będzie od pewnego miejsca rosnący i $\lim_{n\to\infty}(y_n) = +\infty$
Wówczas jeśli istnieje granica
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \quad \text{to istnieje} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \quad \text{i}$$
obie granice są równe!

DOWÓD: (1) Uwaga pomocnicza: Jeśli $\forall i \in \{1, \dots, N\}$
$$\begin{cases} \frac{u_i}{v_i} \in [a,b] \\ v_i > 0 \end{cases} \quad \text{to także} \quad \frac{\sum u_i}{\sum v_i} \in [a,b]$$

$$a \leqslant \frac{u_i}{v_i} \leqslant b$$

$$a \cdot v_i \leqslant u_i \leqslant b \cdot v_i$$

$$av_1 + \dots + av_N \leqslant u_1 + \dots + u_N \leqslant bv_1 + \dots + bv_n$$

$$a \sum v_i \leqslant \sum u_i \leqslant b \sum v_i$$