67

(2) Przypadek $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = a$ i a skończone

$$a-\frac{\varepsilon}{2} \cancel{\leq} < \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \cancel{\leq} < a+\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } n \geq N$$

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}, \quad \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}, \quad \dots \quad \frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N}$$

stosujemy uwagę pomocniczą i mamy

$$a-\frac{\varepsilon}{2} \cancel{\leq} < \frac{x_{n+1}-x_N}{y_{n+1}-y_N} \cancel{\leq} < a+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{x_n}{y_n}-a = \left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right)\frac{y_n-y_N}{y_n}+\frac{x_N}{y_n}-a\frac{y_N}{y_n}$$

$$\frac{x_n-x_N}{y_n} - \frac{a(y_n)}{y_n} + \frac{a\,y_N}{y_n}$$

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right| \leq \left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right| \underbrace{\left|1-\frac{y_N}{y_n}\right|}_{\leq 1} + \underbrace{\left|\frac{x_n}{y_n}\right|}_{\to 0} + |a|\underbrace{\left|\frac{y_N}{y_n}\right|}_{\to 0}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

to znaczy można ewentualnie zwiększyć n tak żeby te dodatki nie przekroczyły $\varepsilon/2$.

(3) gdy $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \longrightarrow +\infty$

Dla dostatecznie dużych n mamy

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \geq 1 \\ y_{n+1}-y_n > 0\end{array}\right\} \Rightarrow x_{n+1}-x_n \geq y_{n+1}-y_n > 0$$

Oznacza to że x_n jest rosnący od pewnego miejsca $(n \geq N)$

$$\begin{array}{rl} & x_{n+1}-x_n \geq y_{n+1}-y_n \\ & x_n - x_{n-1} \geq y_n - y_{n-1} \\ & \vdots \\ + & x_{N+1}-x_N \geq y_{N+1}-y_N \\ \hline & x_{n+1}-x_N \geq y_{n+1}-y_N \end{array}$$

~~tak~~ $x_{n+1} \geq y_{n+1} + \underbrace{(x_N - y_N)}_{\text{const.}}$

$\forall n \geq N \quad x_{n+1} \geq y_{n+1} + \text{const.}$

Oznacza to że $\lim x_n = +\infty$. Wcześniej wykazaliśmy, że x_n rosnący od pewnego miejsca. Można więc stosować (2) do

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = 0$ bo (x_n) spełnia założenie!

(4) dla $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$ zamieniamy x_n na $-x_n$ i używamy (3).

UWAGI DO TWIERDZENIA:

• Twierdzenie jest w jedną stronę, tzn z istnienia $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ nic nie wynika o $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$

$$x_n = 1+(-1)^n \qquad \frac{x_n}{y_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
$$y_n = n$$

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{1+(-1)^{n+1} - 1 - (-1)^n}{n+1-n} =$$
$$= \frac{-(-1)^n - (-1)^n}{1} = -2\cdot(-1)^n = 2(-1)^{n+1} \text{ rozbieżny}$$

• Założenie $y_n \to \infty$ jest ważne:

$$x_n = 1-\frac{1}{n} \qquad y_n = 2-\frac{1}{n} \nearrow (y_n) \text{ rosnący ale ograniczony}$$

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{1-\frac{1}{n+1}-1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n+1}-2+\frac{1}{n}} = 1$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1+1/n}{2-1/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

• Monotoniczność y_n jest ważna

$$x_n = \sqrt{n}+(-1)^n \qquad \frac{x_n}{y_n} \longrightarrow 1.$$
$$y_n = \sqrt{n}-(-1)^n$$

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-2(-1)^n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+2(-1)^n} = \frac{\sqrt{\frac{n+1}{n}}-1-\frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\cancel{\frac{n+1}{n}}}-1+\frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$

$$\parallel$$

$$\frac{\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-2(-1)^n}{\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+2(-1)^n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\to 0 \;-2(-1)^n}{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\to 0 \;+2(-1)^n}$$

$$\longrightarrow -1.$$

WNIOSEK ZE STOLZA:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)$ jeśli granica po prawej stronie istnieje.

$\boxed{\text{PRZESTRZENIE METRYCZNE}}$

DEFINICJA: Przestrzenią metryczną nazywamy zbiór X wraz z funkcją

$$d: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

spełniającą warunki

(1) $\forall x,y \quad d(x,y)=0 \iff x=y$

(2) $\forall x,y \quad d(x,y)=d(y,x)$ metryka jest symetryczna

(3) $\forall x,y,z \quad d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

nierówność trójkąta

FAKT: $d(x,y)\geq 0$

$\underline{0}=d(x,x)\le d(x,y)+d(y,x)=\underline{2d(x,y)}$

71

W niektórych książkach zakłada się że $d(x,y) \geq 0$.
Jak widać nie trzeba tego robić.

PRZYKŁAD:

• Dobrze nam znanym przykładem przestrzeni metrycznej jest $(\mathbb{R}, d)$ $d(x,y) = |x-y|$

• Przykład „ekstremalny"
X - dowolny niepusty zbiór
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$
Metryka dyskretna

• Na $\mathbb{R}^n$ (w szczególności na $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$) definiować można różne rodzaje metryki

$$d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| + \dots + |x_n-y_n|$$

metryka miejska

$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

metryka euklidesowa

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, \dots, |x_n-y_n|\}$$

Formalnie rzecz biorąc należałoby sprawdzić, że są to metryki

d_1: (1) oczywisty $x=y \Rightarrow d_1(x,y)=0$
jeśli $d_1(x,y)=0 \Rightarrow \forall i \; |x_i-y_i|=0$
$\Rightarrow x=y$. (2) oczywisty - wystarczy popatrzeć na wzór (3) wynika łatwo z odpowiedniej nierówności dla wartości bezwzględnej

d_∞: (1) oczywisty (2) oczywisty (3)

$\forall i \quad |x_i-z_i| \le |x_i-y_i| + |y_i-z_i|$

więc $\max_i \{|x_i-z_i|\}$ realizuje się dla $i=k$ wtedy

$$\underbrace{|x_k-z_k|}_{d_\infty(x,z)} \le \underbrace{|x_k-y_k|}_{\le d(x,y)} + \underbrace{|y_k-z_k|}_{\le d(y,z)}$$

d_2: (1) oczywisty (2) oczywisty (3)

$$\sqrt{\sum_i (x_i-y_i)^2} \overset{?}{\le} \sqrt{\sum_i (x_i-z_i)^2} + \sqrt{\sum_i (z_i-y_i)^2}$$

Przyjmiemy najpierw, że punkt pośredni to punkt 0:

$$\sqrt{\sum (x_i-y_i)^2} \overset{?}{\le} \sqrt{\sum x_i^2} + \sqrt{\sum y_i^2}$$

Zauważmy że (x_i-y_i) można zamienić na (x_i+y_i) - dowodzimy dla dowolnego y a po prawej stronie znak nie ma znaczenia

Weźmy więc ~~tzw~~

$$\sqrt{\sum_i (x_i+z_i)^2} \overset{?}{\leq} \sqrt{\sum (x_i)^2} + \sqrt{\sum (z_i)^2}$$

obie strony dodatnie, porównajmy kwadraty:

$$\sum (x_i+z_i)^2 =$$

$$= \underbrace{\sum (x_i)^2} + \underbrace{\sum (z_i)^2} + 2\sum x_i z_i$$

$$\left(\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}\right)^2 = \sum (x_i)^2 + \sum (z_i)^2 + 2\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}$$

Porównać należy

$$\cancel{2}\sum x_i z_i \overset{?}{\leq} \cancel{2}\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum z_i^2}$$

W tym celu rozważmy wielomian kwadratowy

$$w(\lambda) = \sum_i (x_i + \lambda z_i)^2 = \sum x_i^2 + \lambda^2 \sum z_i^2 + 2\lambda \sum x_i z_i$$

Z definicji $w(\lambda) \geq 0$ jako suma kwadratów zatem wyróżnik tego wielomianu jest niedodatni:

$$\Delta = 4\sum x_i z_i - 4\sum x_i^2 \sum z_i^2 \leq 0$$

tzn. $\sum x_i z_i \leq \sum x_i^2 \sum z_i^2$ wyszło to co powinno

□

Udowodniliśmy więc że dla dowolnych $x, z \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$d(x,z) \leq \underbrace{\sqrt{\sum x_i^2}}_{=\, d(x,0)} + \underbrace{\sqrt{\sum z_i^2}}_{=\, d(z,0)}$$

Zauważmy, że zawsze $d(a,b) = d(a-b,0)$

zatem

$$d(x,z) = d(x-z,0) = d((x-y)-(y-z),0) =$$

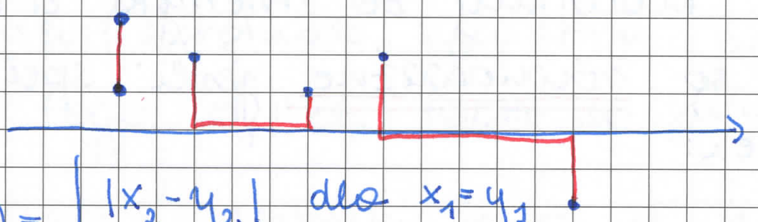
$$\leq d(x-y,0) + d(y-z,0) = d(x,y) + d(y,z)$$

zatem nierówność trójkąta została wykazana. $\square$

PRZYKŁADY TROCHĘ DZIWNE:

Metryka dorzecza Amazonki

$X = \mathbb{R}^2$

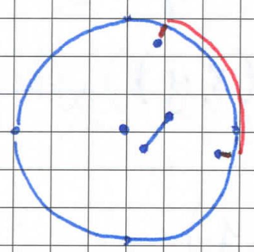


$$d(x,y) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{dla } x_1 = y_1 \\ |x_2| + |y_2| + |x_1 - y_1| & \text{dla } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$

Metryka jeziora

$$X = \{ \cancel{(x,y)\in\mathbb{R}^2} : (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$$

$$d(x,y) = \min\left\{ d_2(x,y),\ 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + 1 - \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \right\}$$



Dowody, że powyższe wzory określają metrykę → samodzielnie lub na ćwiczeniach