Zauważmy, że zawsze $d(a,b)=d(a-b,0)$

zatem

$$d(x,z)=d(x-z,0)=d((x-y)-(y-z),0)=$$

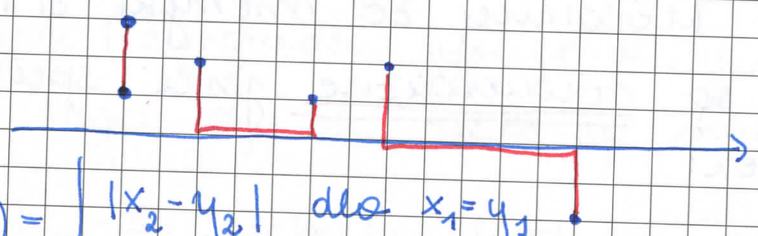
$$\leq d(x-y,0)+d(y-z,0)=d(x,y)+d(y,z)$$

zatem nierówność trójkąta została wykazana. □

PRZYKŁADY TROCHĘ DZIWNE:

Metryka dorzecza Amazonki

$X=\mathbb{R}^2$

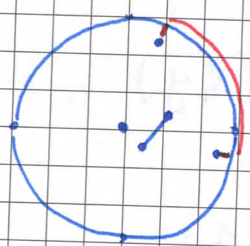


$$d(x,y)=\begin{cases} |x_2-y_2| & \text{dla } x_1=y_1 \\ |x_2|+|y_2|+|x_1-y_1| & \text{dla } x_1\neq y_1 \end{cases}$$

Metryka jeziora

$$X=\{\cancel{(x,y)\in\mathbb{R}^3} : (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2<1\}$$

$$d(x,y)=\min\left\{d_2(x,y),\ 1-\sqrt{x_1^2+x_2^2}+1-\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right\}$$



Dowody, że powyższe wzory określają metrykę → samodzielnie lub na ćwiczeniach

Odległość między punktami zbioru używamy głównie do zdefiniowania pojęcia zbieżności punktów. Do tego celu nie jest istotna dokładna wartość odległości – tak naprawdę istotne jest które punkty są blisko siebie a które daleko. Te same relacje między punktami będą np. dla pewnej metryki d jak i dla metryki d' takiej że $d' = 2d$. Mówimy w tym kontekście o metrykach równoważnych

DEFINICJA Mówimy, że metryki d i ρ w zbiorze X są <u>równoważne</u> jeśli spełniony jest warunek:

$$\cancel{\forall_{x,y\in}} \quad \exists\, C, c > 0 \ \forall x,y \in X \quad d(x,y) \leq c\rho(x,y)$$

$$\text{i} \quad \rho(x,y) \leq C d(x,y)$$

FAKT: Metryki d_∞, d_1, d_2 są równoważnymi metrykami w $\mathbb{R}^n$.

DOWÓD: Zacznijmy od pary d_∞, d_1. Przypomnijmy wzory:
$$d_1(x,y) = \sum_i |x_i - y_i| \qquad d_\infty(x,y) = \max_i \{|x_i - y_i|\}$$

jest zatem jasne, że $\quad d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y)$

oraz

$$d_1(x,y) \leq n \cdot \max_i \{|x_i - y_i|\} = n \cdot d_\infty(x,y)$$

Dla pary d_∞, d_2 odpowiednie nierówności to

$$d_2(x,y)=\sqrt{\sum_i (x_i-y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_i \left(\max_j |x_j-y_j|\right)^2} =$$

$$= \sqrt{n\cdot d_\infty(x,y)^2} = \sqrt{n}\, d_\infty(x,y)$$

$$d_{\cancel{2}\infty}(x,y) \leq d_2(x,y)$$

Wykazaliśmy w ten sposób że równoważne są d_1 i d_∞ oraz d_2 i d_∞. Zauważmy że równoważność metryk jest prawdziwą relacją równoważności (zwrotność, symetria, przechodniość) wobec tego d_1 i d_2 także są równoważne □

OBSERWACJA: Metryki d_1, d_2, d_∞ nie są równoważne metryce dorzecza Amazonki. (ρ) Istotnie, dla każdej liczby rzeczywistej $R>0$ znajdziemy punkty $x,y\in\mathbb{R}^2$ oddalone od siebie o ε względem d_∞ ale leżące w odległości $d>R$ względem metryki ρ. ~~Istotnie,~~ Wystarczy wziąć $x=(x_1,x_2): x_2>R$ i $y=(y_1,y_2)$: $x_2=y_2$, $x_1+\varepsilon=y_1$

$$d_\infty(x,y)=\varepsilon \quad \cancel{d_\infty} \quad \rho(x,y)=|x_2|+|y_2|+|x_1-y_1| =$$
$$= 2R+\varepsilon > R.$$

~~Bardzo ważnym pojęciem w topologii metrycznej jest pojęcie~~ OBSERWACJA (2)

Zauważmy, że metryki d_1, d_2 i d_∞ powstały z pewnej metryki na $\mathbb{R}$ za pomocą stosowania wzorów. Mając metryki na zbiorach $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$) możemy zdefiniować w podobny sposób metryki na iloczynie kartezjańskim:

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

$$D_1\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) = \rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2) + \dots + \rho_n(x_n,y_n)$$

$$D_\infty\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) = \max_i \rho_i(x_i,y_i)$$

$$D_2\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) = \sqrt{\sum_i \rho_i^2(x_i,y_i)}$$

ELEMENTY TOPOLOGII METRYCZNEJ:

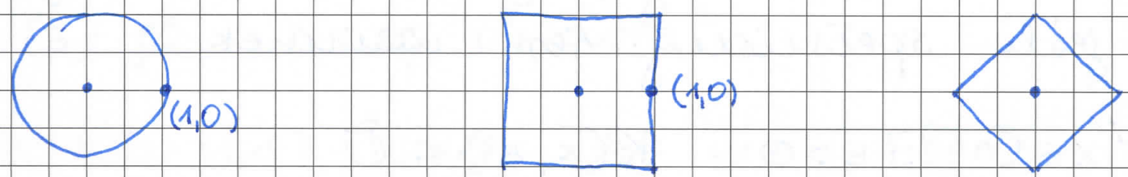
DEFINICJA (X,d) przestrzeń metryczna. Kulą otwartą o środku w x i promieniu r w przestrzeni (X,d) nazywamy zbiór

$$K(x,r) = \{y \in X : d(x,r) < r\}$$

PRZYKŁADY W $\mathbb{R}^2$ – różne metryki

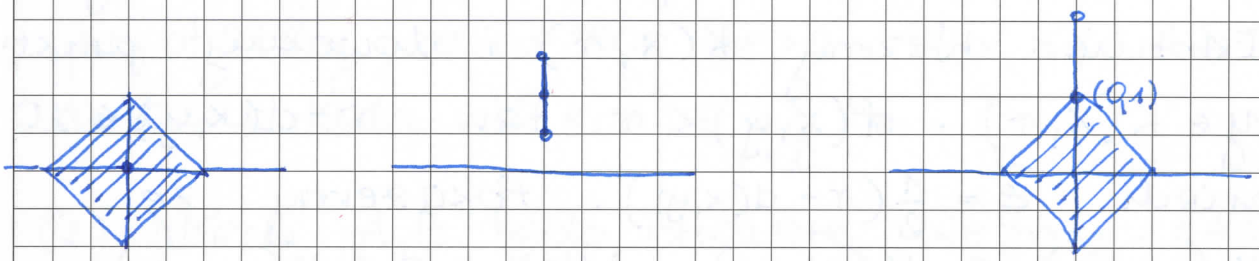
Rozważamy $X = \mathbb{R}^2$ i metryki d_∞, d_1, d_2 oraz metrykę dorzecza Amazonki ρ.

$K_{d_2}((0,0),1)$ $K_{d_\infty}((0,0),1)$ $K_{d_1}((0,0),1)$

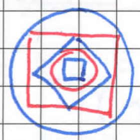


ρ:

$K_\rho((0,0);1)$ $K_\rho((0,2);1)$ $K_\rho((0,1);2)$



OBSERWACJA: Jeśli metryki są równoważne, to w każdej kuli względem jednej metryki można zmieścić kulę względem drugiej. ~~Jest też odwrotnie - odpowiednie zawieranie kul implikuje równoważność metryk.~~



kula względem żadnej z metryk d_1, d_2, d_∞ nie zmieści się w $K_\rho((0,2),1)$ bo jest „chuda".

Kule otwarte posłużą nam do zdefiniowania szczególnego rodzaju podzbiorów w zbiorze X. -

DEFINICJA: PODZBIÓR $\mathcal{O} \subset X$ nazywamy **podzbiorem otwartym** (zbiorem otwartym) w X jeśli spełniony jest warunek

$$\forall x \in \mathcal{O} \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad K(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$$

Innymi mówiąc, ~~każdy zbiór otwarty~~ zbiór otwarty wraz z każdym punktem zawiera pewną otaczającą go kulę.

FAKT: Kula otwarta jest zbiorem otwartym.

Istotnie: Weźmy $K(x, r)$ i dowolny punkt $y \in K(x, r)$. $d(x, y) < r$ tzn $r - d(x,y) > 0$ niech $\varepsilon = \frac{1}{2}(r - d(x,y))$. Pokażemy, że $K(y, \varepsilon) \subset K(x, r)$. Niech $z \in K(y, \varepsilon)$ Oznacza to, że

$$d(y, z) < \varepsilon = \frac{1}{2}(r - d(x,y))$$

$$\underline{d(x, z)} \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}d(x,y) = \frac{1}{2}d(x,y) + \frac{1}{2}r < \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = \underline{r}$$

$$d(x, z) < r \quad \text{tzn.} \quad z \in K(x, r)$$

□.

Zbiory otwarte mają szereg ważnych własności.

FAKT: Własności zbiorów otwartych:

(1) Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

80

(2) Przecięcie dwóch (skończonej liczby) zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym

(3) $\emptyset$ i X są otwarte.

DOWÓD: (1) Niech A_α $\alpha \in I$ będzie rodziną zbiorów otwartych numerowanych elementami zbioru I. Mamy pokazać, że $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ jest otwarte. Istotnie: jeśli $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ to znamy, że $\exists \alpha \in I : x \in A_\alpha$ ale A_α jest otwarty, wobec tego $\exists \varepsilon > 0 : K(x, \varepsilon) \subset A_\alpha$. Ta sama kula $K(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ $\square$.

(2) Niech A, B będą otwarte. Weźmy $x \in A \cap B$ z otwartości A mamy $\exists \varepsilon_A : K(x, \varepsilon_A) \subset A$ oraz ~~$\exists$~~ z otwartości B $\exists \varepsilon_B : K(x, \varepsilon_B) \subset B$ niech $\varepsilon = \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$ wtedy
$K(x, \varepsilon) \subset K(x, \varepsilon_A) \subset A$ i $K(x, \varepsilon) \subset K(x, \varepsilon_B) \subset B$ zatem $K(x, \varepsilon) \subset A \cap B$. Czemu liczba musi być skończona? Weźmy rodzinę $U_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ - odcinki bez końców są otwarte w $\mathbb{R}$. Weźmy $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}$

zbiór jednopunktowy w $\mathbb{R}$ nie jest otwarty.

(3) X jest otwarty - zawiera kule o wszystkich promieniach, $\emptyset$ jest otwarty na mocy umowy.

Zbiór ~~X~~ X wraz z rodziną podzbiorów spełniającą warunki (1)-(3) z poprzedniego faktu nazywa się przestrzenią topologiczną a rodzinę podzbiorów (otwartych) nazywa się topologią i oznacza zazwyczaj $\mathcal{T}$. Przestrzeń topologiczna to para $(X, \mathcal{T})$. Każda przestrzeń ~~topologii~~ metryczna jest przestrzenią topologiczną natomiast nie jest odwrotnie, tzn nie w każdej przestrzeni topologicznej da się wprowadzić metrykę taką, że pochodząca od niej topologia jest zgodna z wyjściową. Jeśli się da, to taką topologię nazywamy metryzowalną. Jeśli się nie da to oczywiście niemetryzowalną. Topologiczne przestrzenie niemetryzowalne nie wchodzą w zakres naszego wykładu.

Przykładem przestrzeni niemetryzowalnej jest przestrzeń $\mathbb{R}$ z topologią generowaną przez odcinki jednostronnie domknięte $[a, b[$ → oznacza to że każdy zbiór otwarty jest sumą pewnej liczby zbiorów generujących, w tym przypadku ~~od a~~ odcinków typu $[a, b[$

Topologia strzałki

FAKT: Metryki równoważne zadają te same topologie. Nie jest jednak odwrotnie, tzn ~~jeśli~~ dwie metryki ~~nie~~ zadają te same topologie nie muszą być równoważne

DOWÓD Fakt, że równoważne metryki zadają te same topologie wynika łatwo z faktu, że kule związane z równoważnymi metrykami wzajemnie się w sobie zawierają. Dowód drugiej części przeprowadzimy podając kontrprzykład tzn dwie nierównoważne metryki mające te same topologie.

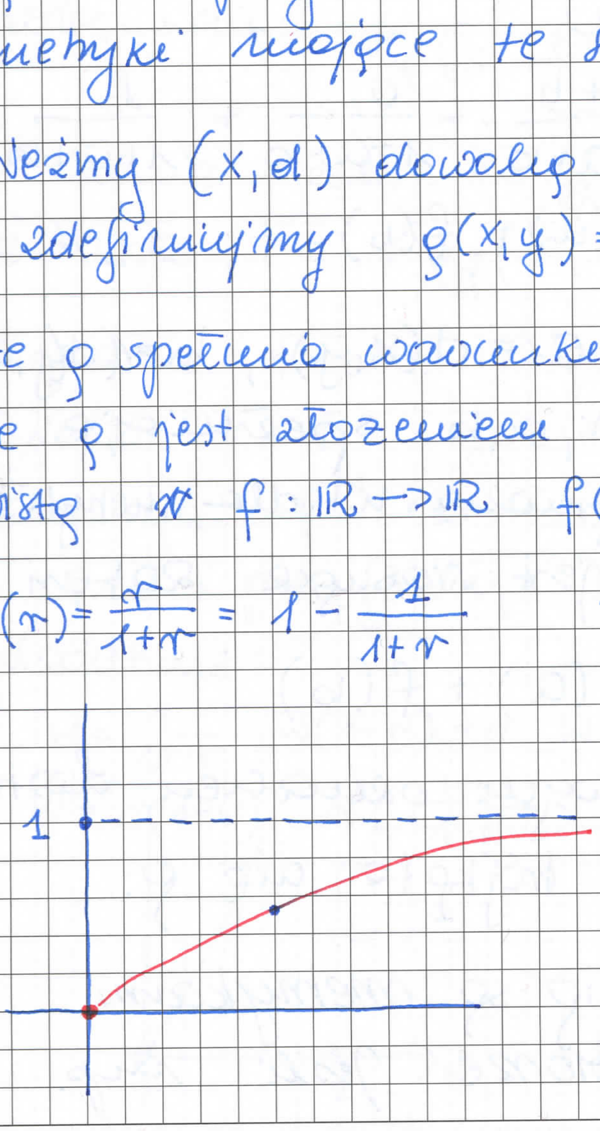
Weźmy (X, d) dowolną przestrzeń metryczną i zdefiniujmy $\rho(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ Pokażemy, że ρ spełnia warunki metryki. Zauważmy, że ρ jest złożeniem d z funkcją rzeczywistą ~~r~~ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(r) = \dfrac{r}{1+r}$

$$f(r) = \frac{r}{1+r} = 1 - \frac{1}{1+r}$$

Dla $r \geq 0$ funkcja ma jedno miejsce zerowe: $r = 0$ dlatego

$$\rho(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0$$

tzn dla $x = y$.



Wyrażenie definiujące ρ jest jawnie symetryczne ze względu na zamianę x na y.
Jak zwykle najtrudniejsza jest nierówność trójkąta:

$$\rho(x,z) \overset{?}{\leq} \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$$

Zauważmy że funkcja f ma następującą własność dla $a, b \geq 0$

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b)$$

Istotnie $f(a+b) = \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leq$

$$\leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = f(a) + f(b)$$

Weźmy teraz jako $a = d(x,y)$, $b = d(y,z)$
$r = d(x,z)$ liczby r, a, b spełniają nierówność ← oryginalna n.t. dla metryki d

$r \leq a+b$ f. jest rosnąca zatem

$$f(r) \leq f(a+b) \leq f(a) + f(b)$$

Wracając do wyjściowych oznaczeń dostajemy ~~nier~~ warunek trójkąta dla ρ.

Wiemy zatem, że d i ρ są metrykami w tym samym zbiorze. Jeśli np.

d jest nieograniczona jak $|\cdot - \cdot|$ w $\mathbb{R}$ to nie może być równoważna ρ, bo ρ jest ograniczona – przyjmuje wartości nie większe niż 1. Żeby pokazać że obie metryki definiują te same topologię trzeba pokazać, że kula otwarta w d jest otwarta w ρ i odwrotnie – kula otwarta w ρ jest otwarta w d.

Niech $x \in K_d(y, r)$. Pokażemy, że istnieje δ taka, że $K_\rho(x, \delta) \subset K_d(y, r)$. Wiadomo, że $K_d\left(x, (r - d(x,y))/2\right) \subset K_d(y, r)$ wystarczy więc wziąć

$$K_\rho\Big(x, \underbrace{f\Big(\frac{r-d(x,y)}{2}\Big)}_{\delta}\Big) \qquad \delta = f\Big(\frac{r-d(x,y)}{2}\Big)$$

Podobnie jeśli $x \in K_\rho(y, r)$ to istnieje δ taka, że $K_d(x, \delta) \subset K_\rho(y, r)$. Tym razem trzeba wziąć $\delta = f^{-1}\Big(\frac{r-\rho(x,y)}{2}\Big)$ jeśli $r < 1$ i jakiekolwiek δ jeśli $r > 0$. funkcja f^{-1} określona jest na odcinku $]0, 1[$ i przyjmuje wartości rzeczywiste dodatnie:

$w = \frac{r}{1+r}$ $\quad w(1+r) = r$ $\quad w + wr = r$ $\quad w = r - wr$

$w = r(1-w)$ $\quad r = \frac{w}{1-w}$ $\quad f^{-1}(w) = \frac{w}{1-w}$