ANALIZA I R
11 stycznia 2016
Semestr zimowy
Kolokwium II

Za każde zadanie można dostać 4 punkty. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na osobnej kartce, starannie i czytelnie. W nagłówku rozwiązania należy umieścić **nr zadania, imie i nazwisko, nazwisko prowadzącego cwiczenia**.

Zadanie 1. Sprawdź czy istnieje takie $b \in \mathbb{R}$, że funkcja $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) := \begin{cases} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{6}{x^2}}, & x \in]-1,0[\cup]0,1[, \\ b, & x = 0. \end{cases}$$

jest różniczkowalna w punkcie 0. Jeśli tak, to podaj b.

Rozwiązanie: Obliczmy b aby zagwarantować, że funkcja jest ciągła w zerze. Funkcja jest ciącła w zerze wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = b.$$

Zatem, najpierw sprawdzamy czy istnieje granica

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{6}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{6}{x^2} \log\left(\frac{x}{\sin x}\right)}.$$

Aby obliczyć granicę w wykładnice obliczymy wielomian Taylora licznika i mianownika do tego samego stopnia. Przypominamy, że taki stopień ma być tak, że oba wielomiany Taylora nie są jednocześnie równe zeru. Skoro mianownik w wykłanice to wielomian drugiego stopnia w x, obliczymy wielomian Taylora drugiego stopnia licznika i mianownika. Funkcja $x/\sin x$ jest funkcją parzystą i wtedy jego szereg Taylora wokół zera nie ma wyrazów Taylora stopnia nieparzystego, np. pierwszego i trzeciego. Zatem

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - x^3/6 + x^5/120 - \ldots} = \frac{1}{1 - x^2/6 + \ldots} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2/6 - \ldots)^n = 1 + x^2/6 + o(x^2),$$

gdzie $\lim_{x\to 0} o(x^2)/x^2 = 0$. Wówczas,

$$\log\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \log\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = x^2/6 + o(x^2).$$

Korzystając z tego

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{6}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{6}{x^2} \log\left(\frac{x}{\sin x}\right)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{6}{x^2} \frac{x^2}{6}} = e.$$

Zatem, funkcja jest ciągła dla $b = e$. Badamy pochodną w zerze, aby sprawdzić czy funkcja jest też różniczkowalna w tym punkcie. Aby to zrobić, korzystamy z definicji pochodnej. Skoro funkcja f jest parzysta, to pochodna jest równa zeru albo nie istnieje. We szczególności

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{6}{x^2}} - e}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \left(\tfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{6}{x^2}} \left(-\frac{12}{x^3}\log\left(\frac{x}{\sin x}\right) + \frac{6}{x^2}\frac{\sin x}{x}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right).$$

Skoro wiemy, że $\lim_{x\to 0}(x/\sin x)^{6/x^2} = e$, możemy twierdzić, że

$$f'(0) = e\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(-12\log\left(\frac{x}{\sin x}\right) - 6\frac{\sin x}{x}\frac{x\cos x - \sin x}{x}\right).$$

Aby obliczyć granicę możemy skorzystać z wielomianów Taylora licznika i mianownika trzeciego stopnia ponieważ wtedy wiemy, że co najmiej mianownik ma niezerowy wielomian Taylora wokół zera. Szereg Taylora wokół zera licznika ma tylko wyrazy parzyste poniewaz licznik jest funkcją parzystą. Właśnie z tego samego powodu mamy, że

$$\log\left(\frac{x}{\sin x}\right) = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3), \qquad \lim_{x\to 0} o(x^3)/x^3 = 0,$$

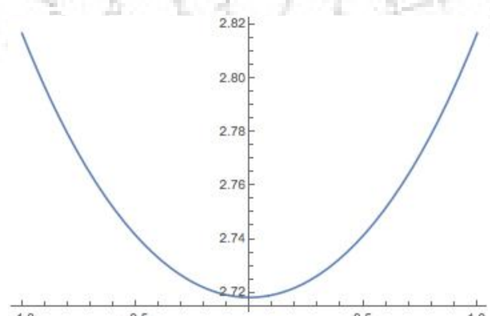
czyli term trzeciego stopnia $\log(x/\sin x)$ jest równy zeru. Podobnie

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3), \quad \frac{x\cos x - \sin x}{x} = \cos x - \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3) = -\frac{x^2}{3} + o(x^3).$$

Do trzeciego stopnia wtedy

$$-12\log\left(\frac{x}{\sin x}\right) - 6\frac{\sin x}{x}\frac{x\cos x - \sin x}{x} = -12\left(\frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) + 2\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)x^2 = o(x^3).$$

Wtedy, funkcja jest różniczkowalna w zerze dla $b = e$. Jej wykres wygląda następująco:



$\square$

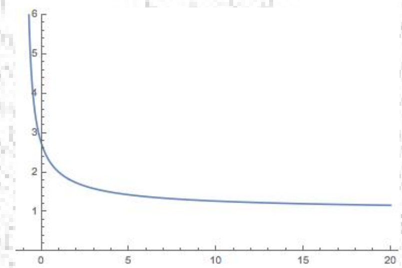
ANALIZA I R
11 stycznia 2016
Semestr zimowy
Kolokwium II

Zadanie 2. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$f\colon]-1,+\infty[\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

i naszkicuj jej wykres.

Rozwiązanie: Wykres wygląda następująco



□

Zadanie 3. Dla rzeczywistego parametru p określ otwartość, domknieętość, zwartość i spójność zbioru

$$A_p := \left\{ x \in]0,1[\;\middle|\; \frac{x\log x}{x^{\log x}} \geq p \right\}$$

w przestrzeni metrycznej $\big(]0,1[, d\big)$, gdzie $d(x,y) = |x-y|$.

Zadanie 4. Oblicz całki nieoznaczone:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx, \qquad \int \cos^2\big(\log(x)\big)\,dx.$$

Rozwiązanie: Mamy, że

$$I_1 = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}dx = \int \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} = \int \frac{dt}{t^2+2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)/\sqrt{2}\right] + c.$$

Można zrobić jeszcze inaczej:

$$I_1 = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2-2x^2}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2}+\frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(x+1/\sqrt{2})^2+1/2}+\frac{1}{(x-1/\sqrt{2})^2+1/2}\right)dx$$
$$= \int\left(\frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}+\frac{1}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{arc\,tan}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arc\,tan}(\sqrt{2}x-1))+c',$$

dla innej stałej $c \in \mathbb{R}$. Aby porównać poprzedni wyniki napiszmy

$$\tan(\operatorname{arc\,tan}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arc\,tan}(\sqrt{2}x-1)) = \frac{\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}x-1}{1-(2x^2-1)} = \frac{\sqrt{2}x}{1-x^2} = \frac{\sqrt{2}}{1/x-x}.$$

Wtedy

$$\tan(\operatorname{arc\,tan}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arc\,tan}(\sqrt{2}x-1)) = \frac{\sqrt{2}}{1/x-x} = -\frac{\sqrt{2}}{x-1/x}.$$

i pisząc $c' = \pi/(2\sqrt{2})+c$ otrzymamy

$$I_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{\sqrt{2}}{x-1/x}\right)+c' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\pi/2-\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{\sqrt{2}}{x-1/x}\right)\right]+c$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{x-1/x}{\sqrt{2}}\right)+c.$$

Druga całka:

$$\int \cos^2\big(\log(x)\big)dx = x\cos^2(\log(x)) + \int \sin(2\log(x))dx.$$

Przez części

$$\int \sin(2\log(x))dx = x\sin(2\log(x)) - 2\int \cos(2\log(x))$$
$$= x\sin(2\log(x)) - 2x\cos(2\log(x)) - 4\int \sin(2\log(x)).$$

Wówczas

$$\int \sin(2\log(x))dx = \frac{x}{5}\left(\sin(2\log(x)) - 2\cos(2\log(x))\right).$$

i

$$\int \cos^2\big(\log(x)\big)dx = x\cos^2(\log(x)) + \frac{x}{5}\left(\sin(2\log(x)) - 2\cos(2\log(x))\right) + c.$$

Ta całka można rozwiązać inaczej.

$$\int \cos^2(\log x)dx = \frac{1}{4}\int (e^{i\log x} + e^{-i\log x})^2 dx = \frac{1}{4}\int (x^{2i} + x^{-i2})dx + \frac{x}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{x^{2i+1}}{2i+1} + \frac{x^{-2i+1}}{-2i+1} + 2x\right).$$

Zatem

$$\int \cos^2(\log x)dx = \frac{x}{4}\left(\frac{x^{2i}}{2i+1} + \frac{x^{-2i}}{-2i+1} + 2\right) = \frac{x}{4}\left[\frac{x^{2i}}{5}(1-2i) + \frac{x^{-2i}}{5}(1+2i) + 2\right].$$

i

$$\int \cos^2(\log x)dx = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{5}[\cos(2\log x) + 2\sin(2\log x)] + 1\right) + c.$$

□

Zadanie 5. Oblicz całkę oznaczoną

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{1+\sin^2 x}.$$

Rozwiązanie: Widać, że

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{1+\sin^2 x} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{1+\sin^2 x} = 4\int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{1+\sin^2 x}\right) dx$$

Teraz

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1+\sin^2 x}\right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1/\cos^2 x}{1/\cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x}\right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+2\operatorname{tg}^2 x}\right) dx.$$

Wtedy,

$$= 2\pi - 4\int_0^{\pi/2} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+2\operatorname{tg}^2 x} dx.$$

Za pomocą zmiany zmiennych $t = \operatorname{tg} x$, która jest dobrze zdefiniowana ponieważ $x \in [0, \pi/2]$, otrzymamy

$$I = 2\pi - 4\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+2t^2} = 2\pi - 4\operatorname{arc}\tan(\sqrt{2}x)/\sqrt{2}|_0^{\infty} = \pi(2-\sqrt{2}).$$

□