Zadanie 2

Zadanie. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

$$f\colon]-1,+\infty[\,\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

i naszkicuj jej wykres.

Rozwiązanie. Mamy $f(x) = \exp\big(g(x)\big)$, gdzie $g(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$.

Ciągłość różniczkowalność. Funkcja f jest gładka na $]-1,+\infty[\,\setminus\{0\}$, bo własność tę ma funkcja g.

Granice, asymptoty.

- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} 1$, więc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \mathrm{e}$.
- $\lim\limits_{x\to \infty} g(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{\log(1+x)}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} 0$, więc $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 1$.
- $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = +\infty$, więc $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$.

W szczególności f ma asymptotę pionową $x=-1$ i asymptotę poziomą $y=1$.

Ponieważ $\frac{\log(1+x)}{x} > 0$ dla x z dziedziny funkcji f, mamy $f(x) > 1$ dla wszystkich x, czyli wykres funkcji f znajduje się nad asymptotą poziomą.

Pochodna i monotoniczność. Pochodna $f = \exp(g)$ jest równa $f' = fg'$, czyli

$$f'(x) = f(x)\frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2}.$$

Niech $u(x) = \frac{x}{1+x} - \log(1+x)$. Wówczas $\operatorname{sgn} f' = \operatorname{sgn} u$ na $]-1,+\infty[\,\setminus\{0\}$. Mamy

$$\lim_{x\to 0} u(x) = 0,$$

natomiast $u'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2}$ jest ujemna dla $x>0$ i dodatnia dla $x<0$. Stąd $u(x) < 0$ dla wszystkich $x \in]-1,+\infty[\,\setminus\{0\}$. Stąd $f' < 0$ i funkcja f jest malejąca. Ponieważ f rozszerza się do ciągłej funkcji na $]-1,+\infty[$, jest ona globalnie malejąca (do tego wystarczy, aby $\liminf\limits_{x\to 0^-} f(x) \geq \limsup\limits_{x\to 0^+} f(x)$).

Zauważmy, że f rozszerza się do funkcji różniczkowalnej na $]-1,+\infty[$. Istotnie: wiemy już, że g rozszerza się do funkcji ciągłej na $]-1,+\infty[$. Podobnie

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2} \overset{2\times\mathrm{H}}{=} -\tfrac{1}{2},$$

a zatem $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}$.

Ponieważ f jest ciągła w punkcje $x=0$ (po rozszerzeniu $f(0)=\mathrm{e}$), z twierdzenia Lagrange'a wynika, że istnieje $f'(0)$ i $f'(0) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}$.

Warto wspomnieć, że z teorii szeregów potęgowych natychmiast wynika, że funkcja g jest klasy C^∞.

Druga pochodna i wypukłość. Mamy $g' = \frac{u}{x^2}$, a więc $g'' = \frac{u'x^2 - 2xu}{x^4} = \frac{xu'-2u}{x^3}$. Ponadto $\big[xu'(x) - 2u(x)\big]\big|_{x=0} = 0$ oraz $\big(xu'(x) - 2u(x)\big)' = \frac{2x^2}{(1+x)^3}$. Stąd funkcja $x \mapsto \big(x^2u'(x) - 2xu(x)\big)$ ma taki sam znak jak x i w konsekwencji $g'' > 0$.

Oznacza to, że funkcja g jest wypukła na $]-1,0[$ i $]0,+\infty[$. Ale nietrudno pokazać, że g jest również wypukła po rozszerzeniu przez ciągłość na $]-1,+\infty[$. Wynika to z faktu, że g' i g'' mają skończone granice w zerze:

$$\lim_{x\to 0} g'(x) \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{u'(x)}{2x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{u''(x)}{2} = -\tfrac{1}{2}$$

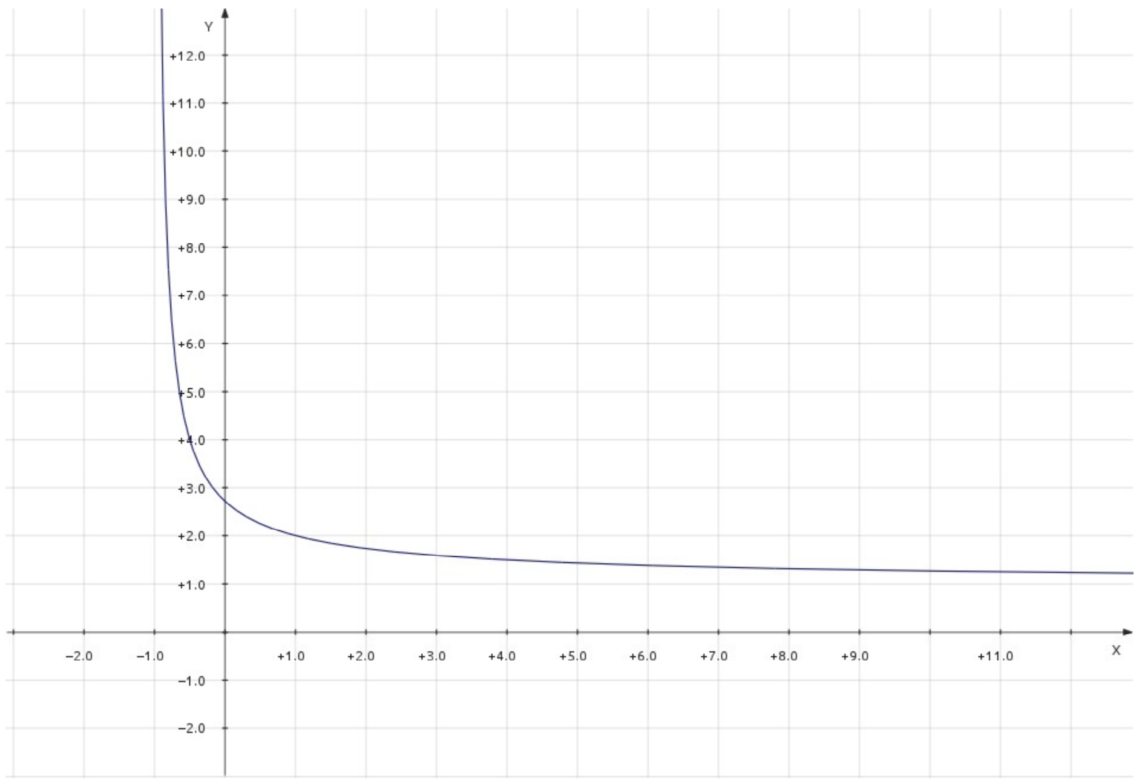
oraz

$$\lim_{x\to 0} g''(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2u'(x) - 2xu(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{xu'(x) - 2u(x)}{x^3}$$

$$\stackrel{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{xu''(x) - u'(x)}{3x^2} \stackrel{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{xu'''(x)}{6x} = \frac{2}{3}.$$

(Korzystaliśmy z tego, że $u''(x) = \frac{x-1}{(1+x)^3}$ oraz $u'''(x) = \frac{2(2-x)}{(1+x)^4}$.)

Tak więc funkcja g jest globalnie wypukła. Teraz korzystając z tego, że funkcja exp jest rosnąca i wypukła, łatwo dowodzimy, że $f = \exp(g)$ jest wypukła także po rozszerzeniu na $]-1, +\infty[$.



Wykres funkcji f

$\square$

Zadanie 3

Zadanie. Dla rzeczywistego parametru p określ otwartość, domkniętość, zwartość i spójność zbioru

$$A_p := \left\{ x \in]0,1[\;\middle|\; \frac{x \log x}{x^{\log x}} \geq p \right\}$$

w przestrzeni metrycznej $\big(]0,1[, d\big)$, gdzie $d(x,y) = |x-y|$.

Rozwiązanie. Funkcja $f(x) = \frac{x\log x}{x^{\log x}}$ jest ciągła na $]0,1[$ więc zbiór A_p jest na pewno domknięty, jako przeciwobraz domkniętego zbioru $[p, +\infty[$.

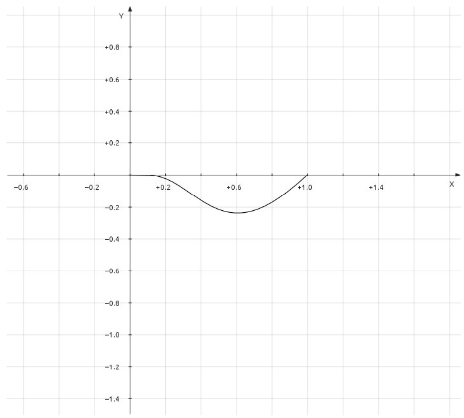
Jest jasne, że $f(x) < 0$ dla $x \in]0,1[$ i łatwo sprawdzamy, że $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$. Ponadto f jest różniczkowalna na $]0,1[$ i

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-(\log x)^2}\big(-2(\log x)^2 + \log(x) - 1\big) = \mathrm{e}^{-t^2}(-2t^2 + t - 1),$$

gdzie $t = \log x \in]-\infty, 0[$. Funkcja ta zeruje się dla $t = 1$ i $t = -\frac{1}{2}$. czyli $x = \mathrm{e} \notin]0,1[$ i $x = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \in]0,1[$. Stąd f ma minimum w punkcie $x = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ równe

$$c := f\big(\tfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\big) = -\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\big)^{\frac{3}{2}}.$$

Oto wykres funkcji f:



Wykres funkcji f

Stad

- Dla $p \geq 0$ mamy $A_p = \emptyset$ i zbiór ten jest otwarty domknięty, natomiast spójność i zwartość jest nieokreślona – zależy od przyjętych definicji.
- Dla $c < p < 0$ zbiór A_p jest sumą dwóch rozłącznych przedziałów: $A_p =]0,\alpha] \cup [\beta, 1[$ dla pewnych $\alpha, \beta \in]0,1[$, $\alpha < \beta$. Stąd A_p jest domknięty, nie jest otwarty (α i β nie są punktami wewnętrznymi), nie jest spójny (jasne) i nie jest zwarty (ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ określony jako $x_n = \min\{\alpha, \frac{1}{n}\}$ nie ma podciągu zbieżnego).
- Dla $p \leq c$ mamy $A_p =]0,1[$, a więc A_p jest domknięty, otwarty, spójny i nie jest zwarty (jak wyżej).

$\square$