

Analiza I R, 2015/2016

dynamiczna lista tematów egzaminacyjnych

Osoby, które zaliczyły ćwiczenia oraz zdały (w sensie uzyskania więcej niż połowy punktów) egzamin pisemny, mają prawo do trójki. Osoby, które chciałyby dostać wyższą ocenę, muszą podejść do egzaminu ustnego. Poniżej znajdują się tematy egzaminacyjne. Nie są to pytania. Zdający będzie musiał odpowiedzieć na dwa pytania dotyczące tematów przedstawionych poniżej. Uwaga: tematy egzaminacyjne nie są rozłączne pod względem treści.

Temat 1 Elementy teorii mnogości. Paradoks Cantora, “zbiór wszystkich zbiorów” i wszystko co chcielibyście powiedzieć na ten temat. Mówiąc o sprawach teoretycznych warto mieć na myśli jakieś przykłady.

Temat 2 Relacje i odwzorowania. Surjekcja, injekcja, bijekcja, obraz, przeciwobraz, poziomicca. Z przykładami oczywiście!

Temat 3 Równoliczność zbiorów. Zbiory skończone i nieskończone. Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne. Twierdzenie Cantora. Twierdzenie Cantora-Bernsteina-Schroedera. Podobnie jak w pytaniu poprzednim powinno się mieć w zanadru odpowiednie przykłady.

Temat 4 Relacje równoważności: definicja, klasy abstrakcji, zastosowania, przykłady z różnych dziedzin matematyki. Warto pomyśleć nad przykładami z algebry!

Temat 5 Struktura zbioru liczb rzeczywistych: definicja ciała, porządek, aksjomat Archimedesa, aksjomat zupełności. Warto umieć udowodnić kilka na oko oczywistych faktów, posługując się aksjomatami: np z aksjomatu Archimedesa wyprowadzić fakt, który mówi, że między dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi zawsze znajduje się liczba wymierna. Przyda się też umiejętność przybliżania liczb wymiernych niewymiernymi i odwrotnie.

Temat 6 Zbiory ograniczone w \mathbb{R} . Definicja kresów. Twierdzenie o istnieniu kresów. Warto zapoznać się z pojęciem przekroju i przekrojami Dedekinda, chociaż na wykładzie temat był jedynie wspomniany. Przeczytać można w Rudinie.

Temat 7 Ciągi liczb rzeczywistych: definicja ciągu, pojęcie granicy i zbieżności ciągów, podstawowe twierdzenia o ciągach zbieżnych, np. operacje na ciągach zbieżnych.

Temat 8 Metody badania zbieżności ciągów. Twierdzenia o trzech ciągach, o ciągach monotonicznych i ograniczonych.

Temat 9 Punkt skupienia ciągu, granica górna i dolna ciągu, przykłady różnych ciągów mających mało albo dużo punktów skupienia. Definicja i podstawowe twierdzenia dotyczące tych pojęć.

Temat 10 Ciągi Cauchy’ego: definicja i podstawowe twierdzenia. Definicja \mathbb{R} przy pomocy ciągów Cauchy’ego.

Temat 11 Definicja liczby e i funkcji $x \mapsto e(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$. Wszystko co umiemy powiedzieć o tej funkcji korzystając z twierdzeń o ciągach.

Temat 12 Twierdzenie Stolza z dowodem, przykładami i wnioskami.

Temat 13 Definicja metryki. Przykłady metryk. Kule otwarte. Metryki równoważne.

Temat 14 Zbiory otwarte w przestrzeni metrycznej. Definicja, własności. Co to jest *topologia*? Równoważność metryk a topologia.

Temat 15 Zbiory domknięte. Punkt skupienia zbioru. Zbiory domknięte a topologia.

Temat 16 Operacje domknięcia i wnętrza. Własności.

Temat 17 Odwzorowania ciągle w punkcie. Różne definicje i ich równoważność. Ciągłość a metryka i topologia.

Temat 18 Odwzorowania ciągle na zbiorze. Odwzorowania ciągle a zbiory otwarte i domknięte.

Temat 19 Zbiory zwarte. Definicja, przykłady, własności. Ciągłość a zwartość.

Temat 20 Zbiory spójne. Definicja, przykłady, własności. Ciągłość a spójność. Łukowa spójność.

Temat 21 Ciągłość, jednostajna ciągłość Lipschitzowskość. Podobieństwa, różnice, przykłady.

Temat 22 Własności funkcji ciągłych na odcinku.

Temat 23 Pochodna funkcji w punkcie. Definicja i podstawowe prawa różniczkowania (warto je umieć udowodnić).

Temat 24 Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego: Rolle'a, Lagrange'a, wzór Cauchy'ego. Własność Darboux dla pochodnych.

Temat 25 Ekstremum funkcji jednej zmiennej. Ekstremum funkcji różniczkowalnej. Poradnik poszukiwacza ekstremów.

Temat 26 Monotoniczność funkcji w związku z rachunkiem różniczkowym. Monotoniczność w punkcie i na zbiorze.

Temat 27 Twierdzenie o różniczkowaniu funkcji odwrotnej wraz z zastosowaniem do obliczania pochodnych funkcji cyklometrycznych i odwrotnych do hiperbolicznych.

Temat 28 Poradnik badacza funkcji - co i jak sprawdzać. Warto też wiedzieć dlaczego właśnie tak.

Temat 29 Reguły de l'Hospitala–Bernoulliego. Do odpowiedzi na to pytanie niezbędna jest peruka z epoki!

Temat 30 Wzór Taylora, różne postaci reszty, zastosowanie wzoru Taylora.

Temat 31 Funkcje pierwotne - definicja, poszukiwanie (poradnik poszukiwacza).

Temat 32 Definicja całki Riemanna na odcinku zwartym i kryterium całkowalności (to z różnicą sumy górnej i dolnej). Własności całki (liniowość, co będzie jak podzielimy odcinek na części...)

Temat 33 Twierdzenie o całkowalności funkcji ciągłych z dowodem.

Temat 34 Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego.

- Temat 35** Szeregi liczbowe: definicja, warunek konieczny zbieżności, przykłady.
- Temat 36** Szeregi o wyrazach dodatnich – podstawowe kryteria zbieżności: I, II, III porównawcze z dowodami.
- Temat 37** Szeregi o wyrazach dodatnich – lemat o zagęszczaniu z dowodem.
- Temat 38** Szeregi o wyrazach dodatnich – kryteria Cauchy’ego i d’Alembert’a z dowodami.
- Temat 39** Szeregi o wyrazach dodatnich – kryterium całkowite z dowodem.
- Temat 40** Szeregi o wyrazach dowolnych – kryteria Leibniza, Dirichleta i Abela z dowodami.
- Temat 41** Twierdzenie Riemanna o szeregach zbieżnych warunkowo z dowodem.
- Temat 42** Iloczyn szeregów - definicja.
- Temat 43** Ciągi funkcyjne - pojęcie zbieżności jednostajnej, czym się różni od punktowej.
- Temat 44** Twierdzenie o ciągłości jednostajnej granicy ciągu funkcji ciągłych z dowodem.
- Temat 45** Twierdzenie o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych wyraz po wyrazie.
- Temat 46** Twierdzenie o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.
- Temat 47** Kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych.
- ⋮