Zbiór zadań z Analizy I R

Grzegorz Cieciura, Katarzyna Grabowska, Javier de Lucas, Piotr Sołtan, ...

Zadanie 1 Zbadać zbieżność i ewentualnie obliczyć granicę ciągu $x_n = \sqrt[n]{n}$.

Wskazówka (1) Wziąć $y_n := x_n - 1$. Uzasadnić, że $y_n > 0$. Oszacować $(y_n + 1)^n$ przy pomocy odpowiednio wybranych wyrazów z rozwinięcia dwumianu Newtona i skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

Rozwiązanie (1) Niech $y_n := x_n - 1$. Ciąg (y_n) jest ciągiem wyrazów ściśle dodatnich dla $n > 1$. Gdyby tak nie było, to dla pewnego $m > 1$ mielibyśmy $x_m \leqslant 1$, wtedy także $(x_m)^m \leqslant 1$. Ale $(x_m)^m = m > 1$. Korzystając z definicji y_n możemy napisać $\sqrt[n]{n} = y_n + 1$, zatem $n = (y_n + 1)^n$. Użyjemy rozwinięcia dwumianu Newtona. Wypiszemy jedynie trzy pierwsze wyrazy rowinięcia:

$$n = (y_n + 1)^n = 1 + ny_n + \binom{n}{2} y_n^2 + \cdots \geqslant 1 + ny_n + \binom{n}{2} y_n^2 \geqslant 1 + \binom{n}{2} y_n^2$$

Przy pierwszym oszacowaniu opuściliśmy poszostałe (dodatnie) wyrazy rozwinięcia, przy drugim opuściliśmy jeszcze drugi wyraz. Mamy teraz nierówność

$$n \geqslant 1 + \binom{n}{2} y_n^2,$$

którą przekształacamy

$$n - 1 \geqslant \frac{n(n-1)}{2} y_n^2, \qquad 1 \geqslant \frac{n}{2} y_n^2, \qquad \frac{2}{n} \geqslant y_n^2, \qquad \sqrt{\frac{2}{n}} \geqslant y_n.$$

Otrzymujemy ostatecznie nierówność

$$0 \leqslant y_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Wiadomo, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n}} = 0$. Z tego i z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \quad \text{więc} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$