EGZAMIN PRZYKŁADOWY

Zadanie 1: Na przestrzeni $C([0,1])$ określamy metrykę wzorem

$$d(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)-y(t)|$$

Zbadać ODZS zbioru $Z = \{x : x(0)x(1) > 1\}$

Zadanie 2: Zbadać zbieżność:

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} - n, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{5}-1}{\log n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+100}} - 1\right)$$

Zadanie 3: Udowodnić, że dla $x\in\mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$1 + \frac{x}{2}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \geq \sqrt{1+x^2}$$

Zadanie 4 Zbadać charakter zbieżności szeregu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\log(1+n^2x^2)$$ dla $x\in\mathbb{R}$. Dowieść, że $f\in C(\mathbb{R})$,

$f\in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \pi$.

Zadanie 5:

Obliczyć $$\lim_{M\to\infty} \int_2^M \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x^2}$$