Egzamin z Analizy I R
2 lutego 2015

Uwagi organizacyjne: Każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem własnym oraz prowadzącej lub prowadzącego ćwiczenia. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a kalkulator i inne pomoce naukowe (np. tablice matematyczne) schowane. W razie wątpliwości prosimy o pytania.

Zadanie 1
Niech (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną a $f : X \longrightarrow X$ izometrią, tzn. odwzorowaniem spełniającym warunek $\forall x, y \in X \ \ d(x, y) = d(f(x), f(y))$. Wykazać, że (a) dla każdego $x \in X$ ciąg rekurencyjny $x_0 = x$, $x_{n+1} = f(x_n)$ spełnia warunek $d(x_m, x_n) = d(x, x_{|m-n|})$, (b) f jest bijekcją.

Zadanie 2
Zbadać zbieżność następujących szeregów liczbowych

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!2^n}{n^{2n}}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\sqrt{2n} - \sqrt[3]{3n})}.$$

Zadanie 3
Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + \log(1+x)}}$

Zadanie 4
Wykazać, że dla $x < 1$ zachodzi nierówność

$$\left| \frac{1+x}{x} \arctan x \right| < \frac{\pi}{2}.$$

Zadanie 5
Zbadać punktową, jednostajną i niemal jednostajną zbieżność ciągu funkcyjnego,

$$f_n(x) := \frac{n^2 x}{1 + (nx+1)^2}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$