Egzamin poprawkowy z Analizy I R
18 lutego 2015

Uwagi organizacyjne: Każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem własnym oraz prowadzącej lub prowadzącego ćwiczenia. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a kalkulator i inne pomoce naukowe (np. tablice matematyczne) schowane. W razie wątpliwości prosimy o pytania.

Zadanie 1
Niech $f : S^1 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na okręgu $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$. Dowieść, że f nie jest ani surjektywna ani injektywna. Na S^1 rozważamy zwykłą metrykę euklidesową indukowaną z $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 2
Zbadać zbieżność następujących szeregów liczbowych

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-n^2)^n}{(2n)!2^n}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pi - n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

Zadanie 3
Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ całka $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^p} \sin\left(\frac{2\pi}{x+1}\right) dx$.

Zadanie 4
Zbadać przebieg zmienności funkcji f i naszkicować jej wykres:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \longmapsto x\frac{e^x + 1}{e^x - 1}.$$

W badaniu uwzględnić ciągłość, jednostajną ciągłość, różniczkowalność, asymptoty, ekstrema i wypukłość.

Zadanie 5
Zbadać punktową, jednostajną i niemal jednostajną zbieżność ciągu funkcyjnego,

$$f_n(x) := \frac{n^2 x}{n^2x^2 + 2nx + n^2 + 1}, \ x \geqslant 0$$

ZADANIE 1: Zbiór S^1 jest zbiorem zwartym, zatem jego obraz względem odwzorowania ciągłego także jest zwarty – nie może być zatem równy niezwartej przestrzeni $\mathbb{R}$.

Załóżmy teraz, że f jest injektywna, wobec tego $f((0,1)) \neq f((0,-1))$. Mniejszą z tych liczb oznaczmy m a większą M. Lewy i prawy półokrąg S^1 są homeomorficzne z domkniętymi odcinkami $[-\pi/2, \pi/2] \subset \mathbb{R}$ i $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ przy pomocy zwykłego odwzorowania parametryzacji $\varphi: \mathbb{R} \to S^1$ $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$. Z własności Darboux wynika, że na odcinku $[-\pi/2, \pi/2]$ funkcja $f \circ \varphi$ przyjmuje wartość $\frac{M+m}{2}$ przynajmniej w jednym punkcie (t_1), podobnie na odcinku $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (t_2) zatem w punktach $\varphi(t_1)$ i $\varphi(t_2)$ funkcja f ma tę samą wartość, a zatem nie jest injektywna – sprzeczność.

ZADANIE 2:

(a) $a_n = \frac{(1-n^2)^n}{(2n)!\,2^n} = (-1)^n \underbrace{\frac{(n^2-1)^n}{(2n)!\,2^n}}_{x_n}$ W celu ewentualnego skorzystania z kryterium Leibniza badam monotoniczność ciągu x_n

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left[(n+1)^2-1\right]^{n+1}(2n)!\,2^n}{(2n+2)!\,2^{n+1}\left[n^2-1\right]^n} =$$

$$= \frac{n^{n+1}(n+2)^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)\cdot 2\,(n+1)^n(n-1)^n} = \frac{1}{4}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{n+1}\frac{(n-1)}{(2n+1)} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot$$

$$= \left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}\cdot e^{-1}\cdot e^{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{e^2}{8} = \left(\frac{e}{2\sqrt{2}}\right)^2 < 1$$

granica $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ jest mniejsza niż 1, zatem od pewnego miejsca ciąg (x_n) jest malejący. ponadto jeśli $\alpha \in]\frac{e^2}{8}, 1[$ to dla wystarczająco dużych n (tzn dla $n > N$, N ustalone) $x_{n+1} < \alpha x_n < \dots < \alpha^{n-N+1} x_N$. Granica ciągu o wyrazie ogólnym $\alpha^{n+1-N} x_N$ przy $n \to \infty$ jest zero, zatem (x_n) także dąży do zera. Szereg $\sum a_n$ zbieżny na mocy kryterium Leibniza

(b) $b_n = \pi - n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ $\quad b_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ dla $\quad f(x) = \pi - \frac{1}{x}\sin(\pi x)$. Badam zachowanie tej funkcji w okolicach $x=0$ w celu ustalenie właściwego szeregu do zastosowania w drugim kryterium porównawczym

$$f(x) = \pi - \frac{1}{x}\sin(\pi x) = \pi - \frac{1}{x}\left(\pi x - \frac{1}{6}(\pi x)^3 + O(x^5)\right) = \pi - \pi + \frac{1}{6}\pi^3 x^2 + O(x^4) = \frac{1}{6}\pi^3 x^2 + O(x^4).$$

Właściwym szeregiem do porównania będzie zatem $c_n = \frac{1}{n^2}$ wtedy $\frac{b_n}{c_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi^3}{6}$

Szereg $\sum b_n$ zbieżny na mocy drugiego kryterium porównawczego ze zbieżnym szeregiem $\sum 1/n^2$.

ZADANIE 3. Oddzielnie zbadamy zachowanie funkcji podcałkowej w okolicach $x=0$ i w nieskończoności. Dla $x>3$ $\sin\left(\frac{2\pi}{x+1}\right)$ monotonicznie maleje do zera. Rozważmy całkę

$$\int_3^\infty \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{2\pi}{x+1}\right)dx = -\int_{\pi/2}^0 \frac{t^p}{(2\pi-t)^p}\sin(t)\frac{2\pi}{t^2}dt = \int_0^{\pi/2}\frac{2\pi}{(2\pi-t)^p}\,\frac{\sin(t)}{t^{2-p}}dt$$

$t = \frac{2\pi}{x+1}$ $\quad dt = -\frac{2\pi}{(x+1)^2}dx = -\frac{1}{2\pi}t^2 dx$

$x+1 = \frac{2\pi}{t}$ $\quad dx = -\frac{2\pi}{t^2}dt$

$x = \frac{2\pi - t}{t}$

całka ta jest zbieżna jeśli $1-p<1$ tzn $p>0$.

Dla zbadanie zbieżności całki w okolicach zera dokonamy identycznego podstawienia dla $x\in[0,1]$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\left(\frac{2\pi}{x+1}\right)dx = -\int_{2\pi}^{\pi}\frac{t^p}{(2\pi-t)^p}\sin(t)\frac{2\pi}{t^2}dt = -\int_0^{\pi}\frac{(2\pi-u)^p}{u^p}\sin(2\pi-u)\frac{2\pi}{(2\pi-u)^2}dt =$$

$u = 2\pi - t$ $\quad du = -dt$

$t = 2\pi - u$

$$= -\int_0^{\pi}\frac{(2\pi-u)^{p-2}}{u^p}\sin(u)\,2\pi\,dt$$

o zbieżności całki decyduje $\frac{\sin u}{u^p}$ zatem warunek $p-1<1$ daje $p<2$

Całka jest zbieżna dla $p\in\,]0,2[$

ZADANIE 4: Zauważmy, że f jest symetryczna: $f(-x) = -x\dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = -x\dfrac{e^{-x}(1+e^{x})}{e^{-x}(1-e^{x})} = -x\dfrac{e^{x}+1}{-(e^{x}-1)} = f(x)$. Możemy więc badać funkcję jedynie dla $x>0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\dfrac{e^x+1}{e^x-1} = 2$ $\lim\limits_{x\to +\infty} x\dfrac{e^x+1}{e^x-1} = +\infty$ f jest ciągła na $]0,\infty[$ jako złożenie funkcji ciągłych

$$f'(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1} + x\frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x+1}{e^x-1} + x\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{1}{(e^x-1)^2}\left((e^x+1)(e^x-1)-x2e^x\right) =$$

$$= \frac{1}{(e^x-1)^2}\underbrace{\left[e^{2x}-1-2xe^x\right]}$$

znak tego nawiasu decyduje o znaku pochodnej. $h(x) = e^{2x}-1-2xe^x$

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!} - 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - 1 = \cancel{1} + \cancel{2x} + \cancel{\frac{4x^2}{2}} + \dots + \frac{2^n x^n}{n!} + \dots - \cancel{2x} - \cancel{2x^2} - \dots - \frac{2x^{n+1}}{n!} - \dots - \cancel{1} =$$

$$= \frac{8x^3}{3!} - \frac{2x^3}{2!} + \frac{16x^4}{4!} - \frac{2x^4}{3!} + \dots + \underbrace{\frac{2^n x^n}{n!} - \frac{2x^n}{(n-1)!}}$$

$$\frac{2^n}{n!} - \frac{2}{(n-1)!} = \frac{2}{(n-1)!}\left[\frac{2^{n-1}}{n} - 1\right] = \frac{2}{(n-1)!}\left[\frac{2^{n-1}-n}{n}\right] > 0 \quad \text{dla } n \geq 3$$

funkcja h ma w rozwinięciu w szereg wszystkie współczynniki dodatnie, szereg ma nieskończony promień zbieżności, dla $x>0$ h jest więc dodatnia, a zatem f rosnąca.
Z symetrii f wynika że f ma minimum w $x=0$. $x=0$ nie należy do dziedziny, jednak granica jest skończona można rozszerzyć f do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = \frac{(2e^{2x}-2e^x-2xe^x)(e^x-1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(e^x-1)}e^x(e^{2x}-1-xe^x)}{(e^x-1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{1}{(e^x-1)^3}\left[2e^{3x}-2xe^{x}-2e^{2x}-2e^{2x}+2xe^x+2e^x-2e^{3x}+2e^x+4xe^{2x}\right]$$

$$= \frac{1}{(e^x-1)^3}e^x\left[e^x(x-2)+(2+x)\right]$$

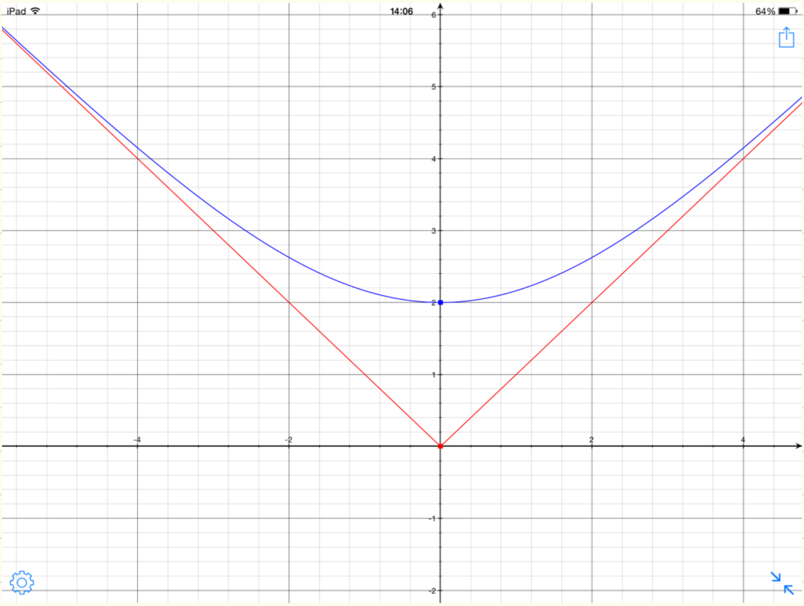
drugą pochodna dodatnia ... trochę trzeba popracować.

Asymptoty

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x+1}{e^x-1} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$$

$$f(x)-x = x\left[\frac{e^x+1}{e^x-1} - 1\right] = x\left[\frac{e^x+1-e^x+1}{e^x-1}\right] = x\,\frac{2}{e^x-1} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

Asymptota ukośna $y=x$



ZADANIE 4: $f_n(x) = \frac{n^2 x}{(nx+1)^2+n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{(nx+1)^2+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{(x+\frac1n)^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$$ granica punktowa

$f_\infty(x)-f_n(x)>0$

$$f_\infty(x)-f_n(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x+\frac1n)^2+1} = x\left[\frac{(x+\frac1n)^2+1-x^2-1}{(x^2+1)((x+\frac1n)^2+1)}\right] = x\left[\frac{(x+\frac1n-x)(x+\frac1n+x)}{\dots}\right] =$$

$$= \frac{x}{n}\,\frac{2x+1/n}{[x^2+1][(x+\frac1n)^2+1]} = \frac{x}{(x^2+1)n}\left[\frac{2x+\frac1n}{[(x+\frac1n)^2+1]}\right]^{u_n}$$

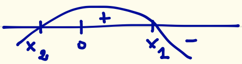
pochodna tego co w nawiasie

$$\frac{2[(x+\frac1n)^2+1]-2(x+\frac1n)(2x+\frac1n)}{[(x+\frac1n)^2+1]^2} = \frac{2}{\dots}\left[x^2+\cancel{\frac{2x}{n}}+1-2x^2-\cancel{\frac{2x}{n}}-\frac{x}{n}-\cancel{\frac{1}{n^2}}+\cancel{\frac{1}{n^2}}\right]=$$

$$= \frac{2}{\dots}\left[-x^2-\frac xn+1\right] = \frac{-2}{\dots}\left[x^2+\frac xn-1\right] = \frac{-2}{\dots}\left[\left(x-\frac{1}{2n}\right)^2-1-\frac{1}{4n^2}\right] = \frac{-2}{\dots}\left[\left(x-\frac{1}{2n}-\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}\right]\cdot\right.$$

$$\left[x-\frac{1}{2n}+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}\right]$$

$x_1 = \frac{1}{2n}+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}$ $\quad x_2 = \frac{1}{2n}-\sqrt{} < 0$



x_1 jest maksimum

$$u_n\left(\frac{1}{2n}+\sqrt{}\right) = \frac{2\cdot\left(\frac{1}{2n}+\sqrt{}\right)+\frac1n}{\left(\frac{1}{2n}+\sqrt{}+\frac1n\right)^2+1} = \frac{2\sqrt{}+\frac2n}{1+\left(\frac{9}{4n^2}+1+\frac{1}{4n^2}+\frac3n\sqrt{}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$0 < f_\infty(x)-f_n(x) = \frac{x}{x^2+1}\,\frac1n\cdot u_n(x) < \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{<1}\,\frac1n\,\underbrace{u_n(x_1)}_{<3/2} < \frac{3}{2n} \longrightarrow 0$$

zbieżność jest jednostajna.