1 Całki - zaległości z poprzedniego semestru

Zadanie 1 Podstawienie Eulera służą do znajdowania funkcji pierwotnych do funkcji postaci $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, gdzie R jest wymierną funkcją dwóch zmiennych. Chodzi o to, żeby funkcję zawierającą pierwiastek sprowadzić do funkcji wymiernej. Jeśli oznaczymy $y := \sqrt{ax^2 + bx + c}$ sprowadza się to do sparametryzowania fragmentu krzywej

$$x \mapsto (x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \in \mathbb{R}^2$$

dla $y > 0$ parametrem t w taki sposób, aby $x(t)$ i $y(t)$ były wymierne.

1. Pierwsze podstawienie Eulera działa gdy $a > 0$, podstawiamy $y = \sqrt{a}x + t$. Wyznaczamy $x(t)$, $y(t)$ i $dx = x'(t)dt$;

2. Drugie podstawienie Eulera działa gdy $c > 0$, podstawiamy $y = tx + \sqrt{c}$;

3. Trzecie podstawienie Eulera działa gdy łatwo jest wybrać punkt (x_0, y_0) na krzywej, tzn $y_0 = \sqrt{ax_0^2 + bx_0 + c}$, podstawiamy $y - y_0 = t(x - x_0)$. Prowadząc rachunki warto zapisać y^2 w potęgach $x - x_0$ zamiast x.

Zadanie polega na obliczeniu trzema sposobami całki nieoznaczonej

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} \quad \text{oraz jej wersji oznaczonej} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Zadanie 1.

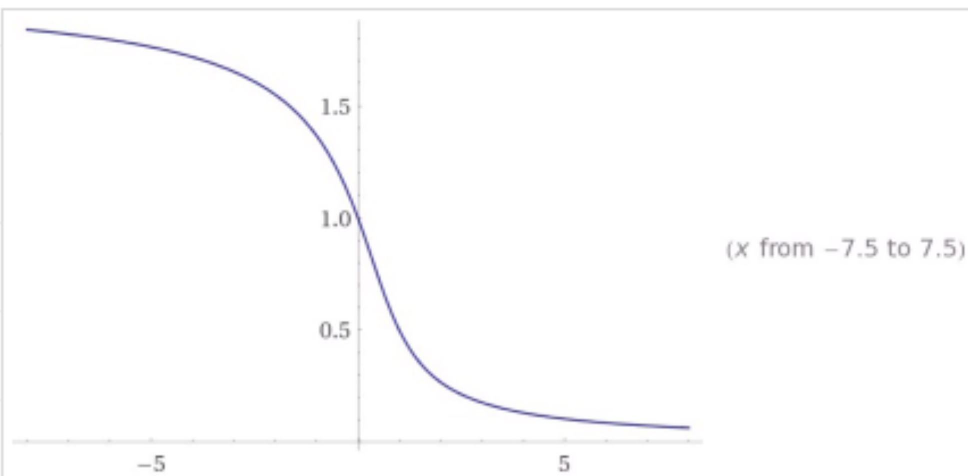
I EULERA: $y=\sqrt{a}\,x+t$ II EULERA $y=tx+\sqrt{c}$ III EULERA

$y-y_0=t(x-x_0)$

Obliczyć trzema sposobami całkę nieoznaczoną i jej wersję oznaczoną porównać wyniki i przekonać się, że wyszło to samo

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\ ,\quad \int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$$

Popatrzmy najpierw na funkcję podcałkową



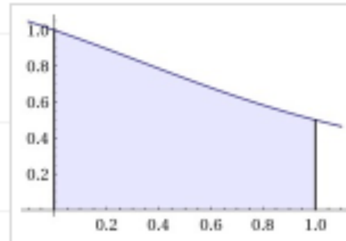
żadnych niespodzianek, istotnie $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ warunek $x+\sqrt{\quad}=0$ oznacza

$$x^2=x^2-x+1\quad 0=-x+1$$ a to zachodzi

dla $x=1$ i jest „fantomowym" rozwiązaniem związanym z podniesieniem do kwadratu. Funkcja jest ciągła a więc całkowalna. Dziedzina to cały zbiór $\mathbb{R}$.

Popatrzmy teraz co powinniśmy dostać jako rozwiązanie zadania:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\,dx =$$
$$-\sqrt{x^2-x+1}+\log\left(2\sqrt{x^2-x+1}+x+1\right)+x-\frac{1}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \text{constant}$$



$$\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\,dx = 1+\log\left(\frac{4}{3}\right)-\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\approx 0.738376$$

To jednak jedynie jako kontrola poprawności rozwiązania, które musimy samodzielnie wyznaczyć!

Zaczynamy od pierwszego podstawienia Eulera: $y=\sqrt{a}\,x+t$

W naszym przypadku $y=\sqrt{x^2-x+1}$ $a=1$

$$\sqrt{x^2-x+1}=x+t \,\Big|^2 \qquad \cancel{x^2}-x+1=\cancel{x^2}+2tx+t^2 \qquad 2tx+x=1-t^2$$

$$x(2t+1)=1-t^2 \qquad \boxed{x=\frac{1-t^2}{2t+1}} \qquad y=x+t=\frac{1-t^2}{2t+1}+t=$$

$$=\frac{1-t^2+2t^2+t}{2t+1}=\frac{t^2+t+1}{2t+1} \qquad \boxed{y=\frac{t^2+t+1}{2t+1}}$$

$$dx=d\left(\frac{1-t^2}{2t+1}\right)=\frac{-2t(2t+1)-2(1-t^2)}{(2t+1)}\,dt=\frac{-4t^2-2t-2+2t^2}{(2t+1)^2}\,dt=$$

$$=-2\,\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}\,dt$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{-2\,\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}\,dt}{\frac{1-t^2}{2t+1} + \frac{t^2+t+1}{(2t+1)}} = -2\int \frac{t^2+t+1}{\underbrace{(2t+1)(t+2)}_{2t^2+5t+2}}\,dt =$$

$$\begin{array}{l} \quad 1 \\ \hline (2t^2+2t+2) : (2t^2+5t+2) \\ 2t^2+5t+2 \\ \hline -3t \end{array} \qquad = -\int 1 - \frac{3t}{(2t+1)(t+2)}\,dt$$

$$\frac{3t}{(2t+1)(t+2)} = \frac{A}{2t+1} + \frac{B}{t+2}$$

$$3t = A(t+2) + B(2t+1)$$

$t=-2$

$-6 = B(-3)$

$\boxed{B=2}$

$t = -\frac{1}{2} \qquad -\frac{3}{2} = A\left(\frac{3}{2}\right) \quad \boxed{A=-1}$

$$= -\int\left(1 + \frac{1}{2t+1} - \frac{2}{t+2}\right)dt = -t - \log(2t+1)\cdot\frac{1}{2} + 2\log(t+2) =$$

$t = y - x = \sqrt{x^2-x+1} - x$

$$= -\sqrt{x^2-x+1} + x - \frac{1}{2}\log\left(2\sqrt{x^2-x+1} - 2x + 1\right) +$$
$$+ 2\log\left(\sqrt{x^2-x+1} - x + 2\right) + C$$

W granicach $\Big|_0^1$: $1 - 1 - \frac{1}{2}\log 1 + 2\log 2 - \left(-1 - \frac{1}{2}\log 3 + 2\log 3\right) =$

$$2\log 2 + 1 - \frac{3}{2}\log 3 = 1 + \log\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right) \approx 0{,}7383\ldots$$

Postać wyniku jest inna, ale wartość liczbowa wskazuje, że jest ok.

II podstawienie Eulera

Tę całkę można policzyć także używając drugiego podstawienia Eulera. Zgodnie z tym podstawieniem $y = tx + 1$ gdzie oczywiście $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

$$y = tx + 1$$

$$x^2 - x + \cancel{1} = t^2x^2 + 2tx + \cancel{1}$$

$$x^2 - x = t^2x^2 + 2tx$$

$$x - 1 = t^2x + 2t$$

$$x(1 - t^2) = 2t + 1$$

$$\boxed{x = \frac{2t+1}{1-t^2}}$$

$$y = t \cdot \frac{2t+1}{1-t^2} + 1 = \frac{2t^2 + t + 1 - t^2}{1-t^2} = \boxed{\frac{t^2+t+1}{1-t^2}}$$

$$y + x = \frac{t^2+t+1}{1-t^2} + \frac{2t+1}{1-t^2} = \boxed{\frac{t^2+3t+2}{1-t^2}}$$

$$dx = \frac{2(1-t^2) - (-2t)(2t+1)}{(1-t^2)^2}\,dt =$$

$$= \frac{2 - 2t^2 + 4t^2 + 2t}{(1-t^2)^2}\,dt = \boxed{\frac{2t^2+2t+2}{(1-t^2)}\,dt}$$

$$\int \frac{dx}{x+y} = 2\int \frac{(t^2+t+1)\,dt}{(1-t^2)(t^2+3t+2)} = 2\int \frac{t^2+t+1}{(t+1)^2(t+2)(1-t)} = \text{ułamki proste}$$

$$\frac{t^2+t+1}{\dots} = \frac{A}{(t+1)^2} + \frac{B}{(t+1)} + \frac{C}{(t+2)} + \frac{D}{(1-t)}$$

$$t^2 + t + 1 = A(t+2)(1-t) + B(t+1)(t+2)(1-t) + C(t+1)^2(1-t) + D(t+1)^2(t+2)$$

$t=-1 \qquad 1 = 2A \qquad A = 1/2$

$t=-2 \qquad 3 = 3C \qquad C = 1$

$t=1 \qquad 3 = 12D \qquad D = 1/4$

$t=0 \qquad 1 = 2A + 2B + C + 2D = 2B + 5/2$

$\qquad 0 = 2B + 3/2 \qquad B = -3/4$

$$= \int 2 \cdot \left[\frac{1/2}{(t+1)^2} - \frac{3/4}{(t+1)} + \frac{1}{(t+2)} + \frac{1/4}{(1-t)} \right] dt =$$

$$- \frac{1}{(t+1)} - \frac{3}{2} \log(t+1) + 2 \log(t+2) - \frac{1}{2} \log(1-t) + C$$

$$t = \frac{y-1}{x} = \frac{\sqrt{x^2-x+1} - 1}{x} \qquad t+1 = \frac{\sqrt{\quad} - 1 + x}{x} \Rightarrow \frac{1}{t+1} = \frac{x}{\sqrt{\quad} - (1-x)} =$$

$$= \frac{x\left(\sqrt{\quad} + (1-x)\right)}{x^2-x+1-(x^2-2x+1)} = \frac{x\left(\sqrt{\quad} + 1 - x\right)}{x} = \sqrt{\quad} + (1-x)$$

$$* = -\sqrt{\quad} - 1 + x - \frac{3}{2}\left[\log\left(\sqrt{\quad} + x - 1\right) - \log x\right] + 2\left[\log\left(\sqrt{\quad} - 1 + 2x\right) - \right.$$

$$\left. - \log x\right] - \frac{1}{2}\left[\log\left(x + 1 - \sqrt{\quad}\right) - \log x\right] =$$

$$= -\sqrt{\quad} - 1 + x - \frac{3}{2}\log\left(\sqrt{\quad} + x - 1\right) + 2\log\left(\sqrt{\quad} + 2x - 1\right) +$$

$$- \frac{1}{2}\log\left(x + 1 - \sqrt{\quad}\right) + \underbrace{\left(\frac{3}{2} - 2 + 1\right)}_{0} \log x + C$$

wynik wygląda skomplikowanie, ale zobaczmy jak wychodzi

całka oznaczona – jest to w pewnym sensie kontrola poprawności rachunków. Zacznijmy od wartości w $x=1$:

$$\Big|^{1} = -1-1+1+\frac{3}{2}\log(1+1-1)+2\log(1+2-1)-\frac{1}{2}\log(1+1-1) =$$

$$= 1+2\log 2$$

Wartości w $x=0$ jest trudniejsze do policzenia. Potrzebujemy tutaj granicę w zerze, gdyż sama funkcja pierwotna tak jak zapisana wcześniej w $x=0$ nie jest określona.

$$\Big|_{0} = -1-1-\lim_{x\to 0}\Big(\frac{3}{2}\log(\sqrt{}+x-1)-2\log(\sqrt{}+2x-1)+\frac{1}{2}\log(\ldots$$

$$x+1-\sqrt{})\Big)$$ łatwiej będzie policzyć granicę podwojoną.

$$\lim_{x\to 0}\Big(-3\log(\sqrt{}+x-1)+4\log(\sqrt{}+2x-1)-\log(x+1-\sqrt{})\Big) =$$

$$\lim_{x\to 0}\log\left[\frac{(\sqrt{}+2x-1)^4}{(\sqrt{}+x-1)^3(x+1-\sqrt{})}\right] \to 3\log 3$$

$$\boxed{\sqrt{x^2-x+1} \approx 1-\frac{1}{2}x}$$

Funkcję pod logarytmem przybliża się jako:

$$\frac{(1-\frac{1}{2}x+2x-1)^4}{(1-\frac{1}{2}x+x-1)^3(x+1-1+\frac{1}{2}x)} = \frac{(\frac{3}{2}x)^4}{(\frac{1}{2}x)^3(\frac{3}{2}x)} = 3^3$$

Ostatecznie całka oznaczona przyjmuje postać:

$$-1+2\log 2-\left(-2+\frac{3}{2}\log 3\right)=1+2\log 2-\frac{3}{2}\log 3 .$$

Ostatecznie wynik obliczeń całki oznaczonej jest taki, jak przy pomocy pierwszego podstawienia Eulera. Można zatem sądzić, iż rachunki są poprawne.

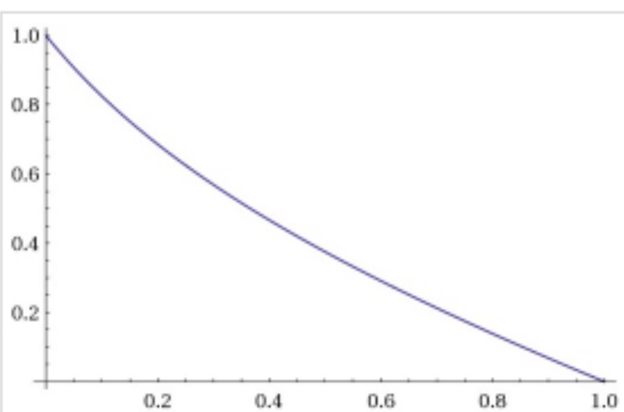
Dla porządku zbadajmy jeszcze, że podstawienia użyte w obu podstawieniach Eulera są prawidłowe, tzn. mogą służyć także dla całki oznaczonej

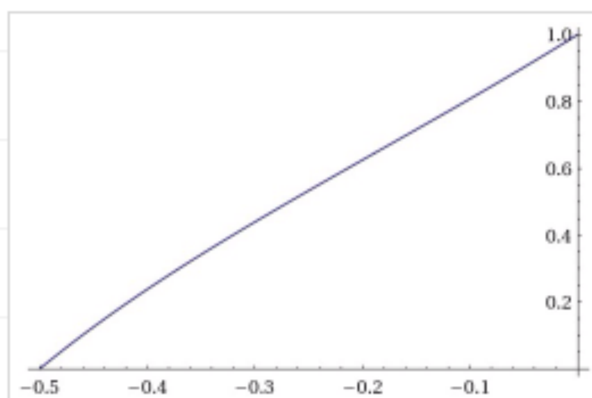
I podst.

$$x=\frac{1-t^2}{2t+1}$$

II podst.

$$x=\frac{2t+1}{1-t^2}$$





III podstawienie Eulera:

W trzecim podstawieniu Eulera weźmiemy $x_0 = 1$ i $y_0 = 1$.

Przydadzą się następujące rachunki:

$$x^2 - x + 1 = (x-1)^2 + 2x - 1 - x + 1 = (x-1)^2 + (x-1) + 1 = y^2$$

Podstawienie wyprowadzimy z warunku

$$y - 1 = t(x-1) \qquad y = t(x-1) + 1$$

$$y^2 = (x-1)^2 + (x-1) + \cancel{1} = t^2(x-1)^2 + 2t(x-1) + \cancel{1}$$

$$(x-1) + 1 = t^2(x-1) + 2t$$

$$(x-1) = \frac{2t-1}{1-t^2} \qquad \boxed{x = \frac{2t-t^2}{1-t^2}}$$

$$dx = \ldots \text{ rachunki } \ldots \boxed{\frac{2-2t+2t^2}{(1-t^2)^2}\, dt}$$

$$y = t\left(\frac{2t-1}{1-t^2}\right) + 1 = \frac{1-t+t^2}{1-t^2} \qquad \boxed{y + x = \frac{1+t}{1-t^2}}$$

$$\int \frac{(1-t^2)(2-2t+2t^2)\, dt}{(1+t)(1-t^2)^2} = \int \frac{2t^2-2t+2}{(1+t)^2(1-t)}\, dt =$$

$$\frac{2t^2-2t+2}{\ldots} = \frac{A}{(t+1)^2} + \frac{B}{(t+1)} + \frac{C}{(1-t)}$$

$$2t^2 - 2t + 2 = A(1-t) + B(t+1)(1-t) + C(t+1)^2$$

$t=1 \qquad 4C=2 \qquad C=\frac{1}{2}$

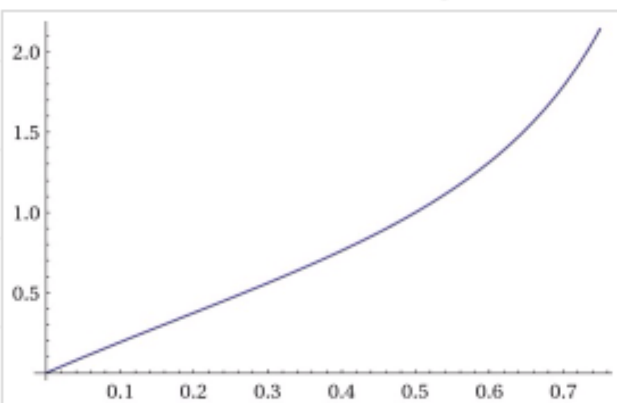
$t=-1 \qquad 2A=6 \qquad A=3$

$t=0 \qquad A+B+C=2 \qquad 3+B+\frac{1}{2}=2 \qquad B=-\frac{3}{2}$

$$=\int\left(\frac{3}{(t+1)^2}+\frac{-3/2}{(1+t)}+\frac{1/2}{1-t}\right)dt=-\frac{3}{1+t}-\frac{3}{2}\log(1+t)+$$

$$-\frac{1}{2}\log(1-t)+c$$

Tym razem nie będziemy już wracać do wyjściowych zmiennych tylko sprawdzimy, czy wyszło co trzeba dla całki oznaczonej



Podstawienie na wykresie wygląda tak

Dla $x=0$ mamy $t=0$ zaś dla $x=1$ $t=\frac{1}{2}$

$$\Big|_0^{1/2} \quad -\frac{3}{3/2}-\frac{3}{2}\log\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{1}-0-0\right)=$$

$$-2-\frac{3}{2}\log 3+\frac{3}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log 2+3=$$

$$1-\frac{3}{2}\log 3+2\log 2$$

Wyszło więc to co powinno za każdym razem!