Zadanie 1 Gdy funkcja podcałkowa ma postać $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ można spróbować pozbyć się pierwiastka stosując podstawienia trygonometryczne lub hiperboliczne. Obliczcie poniższe całki używając wskazanych podstawień i zastanówcie się w jaki sposób powinno się decydować, którego z podstawień mozna i warto użyć w konkretnym przypadku:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}} \qquad x = b\tan t, \ \text{ dwa przypadki } \ 0 < a < b, \ \ 0 < b < a;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}, \qquad x+1 = \tan t;$$

$$\text{całka jak wyżej,} \qquad x+1 = \sinh t;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{5+3\sqrt{1-x^2}}, \qquad x = \sin t.$$

Jako zadanie dodatkowe proszę zapisać funkcje odwrotne do sinh i cosh z użyciem logarytmów.

Zadanie 2 Różne całki oznaczone, różne metody

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^p x}$ dla $p \in \mathbb{R}$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$ (f) $\displaystyle\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$ (h) $\displaystyle\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n dx,\ m,n \in \mathbb{N},\ a < b$

(i) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx,\ n \in \mathbb{N}$ (j) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$

(k) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ (l) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin x(\sin x+\cos x)}$

(m) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx\,dx$ (n) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}dx,\ n \in \mathbb{N}$

Wskazówki: (a) podstawiamy $t = \sqrt{x}$, dalej jest łatwo; (b) nie mam dobrego pomysłu (po podstawieniu $t = \tan x$ wychodzi całka, którą nadal nie wiem jak policzyć); (c) jest to jedna z typowych całek, należy podstawić $t = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$ i bardzo cierpliwie liczyć do końca; alternatywną metodę podał pan Marian Wiatr – zaczyna się od pomnożenia licznika i mianownika przez licznik; (d) można zastosować podstawienie hiperboliczne $x = \sinh t$ a następnie jedno ze standardowych podstawień $u = \tanh\frac{t}{2}$; działa ono tak samo jak podobne podstawienie $\tan\frac{x}{2}$; (e) podstawiamy $t = \tan\frac{x}{2}$, całka jest po przedziale niezwartym, tzn $\int_0^{\infty}$, co traktujemy jako $\lim_{R\to\infty}\int_0^R$; (f) podstawiamy $t = \sqrt{e^x-1}$; (g) w miarę sprawnie liczy się pierwszym podstawieniem Eulera; (h) wiele razy przez części zmniejszając jeden wykładnik a zwiększając drugi; (i) wiele razy przez części zaczynając od $f(x) = (1-x^2)^n$, $g'(x) = 1$; (j) pierwsze podstawienie Eulera lub stosowne podstawienie trygonometryczne (np $x = \frac{1}{4}\tan t$); (k) podstawiamy $t = \tan x$, całkę po odcinku $[-\pi, \pi]$ trzeba jednak w takim wypadku podzielić na całki po mniejszych odcinkach na których podstawienie jest dobre; (l) podstawiamy tangens dzieląc na dwie całki; (m) skorzystać z $\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$; (n) skorzystać z $\sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$.

Rozwiązanie zadania (b) podane przez Javiera

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^p x} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\tan^p x} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^p x}.$$

podstawiając $\bar{x} = \pi/2 - x$ otrzymujemy

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^p x} = -\int_{\pi/4}^{0} \frac{d\bar{x}}{1+\tan^p(\pi/2-\bar{x})} = \int_0^{\pi/4} \frac{d\bar{x}}{1+\mathrm{cotan}^p \bar{x}} = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^p \bar{x} d\bar{x}}{1+\tan^p \bar{x}}.$$

Więc,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^p x} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\tan^p x} + \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^p x dx}{1+\tan^p x} = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Zadanie 2

W tym zadaniu mamy do policzenia całki takiego samego rodzaju jak poprzednio, jednak będziemy to robić innymi metodami. Tym razem chodzi o to, żeby pozbyć się pierwiastka używając jednej z dwóch jedynek: trygonometrycznej lub hiperbolicznej:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad ch^2 t - sh^2 t = 1$$

To której z nich należy użyć zależy od typu wielomianu kwadratowego, który mamy pod pierwiastkiem: $1-x^2 \rightarrow$ jedynka trygonometryczna, $1+x^2$ lub $x^2-1 \rightarrow$ jedynka hiperboliczna.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} \qquad x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$$

właściwym podstawieniem będzie $x+1 = sh\,t$

$$x+1 = sh\,t \qquad x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 = sh^2 t+1 = ch^2 t$$

$$dx = ch\,t\,dt$$

$$\int \frac{ch\,t\,dt}{\sqrt{ch^2 t}} = \int dt = t+c = arsh\,(x+1)+c$$

Przy okazji sprawdźmy związek funkcji odwrotnych do hiperbolicznych z funkcją logarytm.

$$arsh\,y = t \rightarrow y = sh\,t = \frac{e^t-e^{-t}}{2} \rightarrow 2y = e^t - e^{-t} \rightarrow$$ z tego równanie spróbujemy wyznaczyć e^t

$$2y = e^t - e^{-t} \rightarrow 2ye^t = e^{2t}-1 \longrightarrow e^{2t}-2ye^t-1=0$$

mamy równanie kwadratowe na e^t

$$e^{2t}-2ye^{t}-1=0 \quad (e^t-y)^2-y^2-1=0 \quad (e^t-y)^2-(y^2+1)=0$$

$$\left(e^t-y-\sqrt{y^2+1}\right)\left(e^t-y+\sqrt{y^2+1}\right)=0$$

$$e^t=y+\sqrt{y^2+1} \qquad \cancel{e^t=y-\sqrt{y^2+1}}$$

Drugie rozwiązanie odrzucamy gdyż funkcja od y ma ujemne wartości natomiast f. wykładnicza jest dodatnia

$$t=\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

$$\operatorname{arsh} y=\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

Taki sam rachunek możemy zrobić dla cosinusa hiperbolicznego

$$t=\operatorname{arch} y \qquad y=\operatorname{ch} t=\frac{e^t+e^{-t}}{2} \qquad 2y=e^t+e^{-t} \qquad 2ye^t=e^{2t}+1$$

$$e^{2t}-2ye^t+1=0 \qquad (e^t-y)^2-y^2+1=0 \qquad (e^t-y)^2-(y^2-1)=0$$

$$\left(e^t-y-\sqrt{y^2-1}\right)\left(e^t-y+\sqrt{y^2-1}\right)=0$$

$$e^t=y+\sqrt{y^2-1} \qquad \cancel{e^t=y-\sqrt{y^2-1}}$$

Drugie rozwiązanie wyrzucamy gdyż $y-\sqrt{y^2-1}<1$

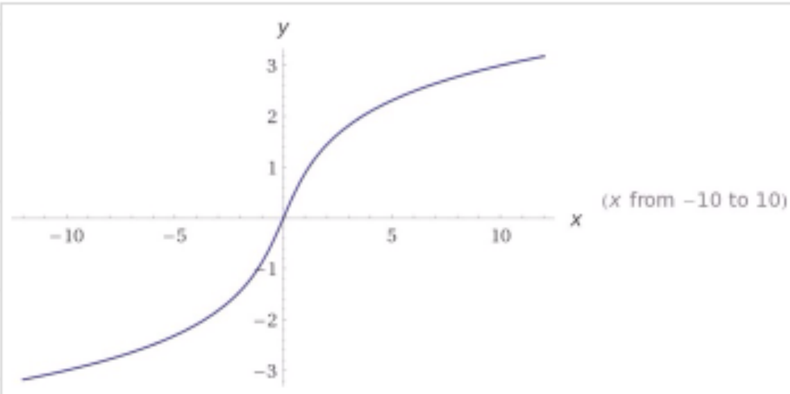
(sprawdzamy $y-1<\sqrt{(y-1)(y+1)}$

$\sqrt{(y-1)(y-1)}<\sqrt{(y-1)(y+1)}$

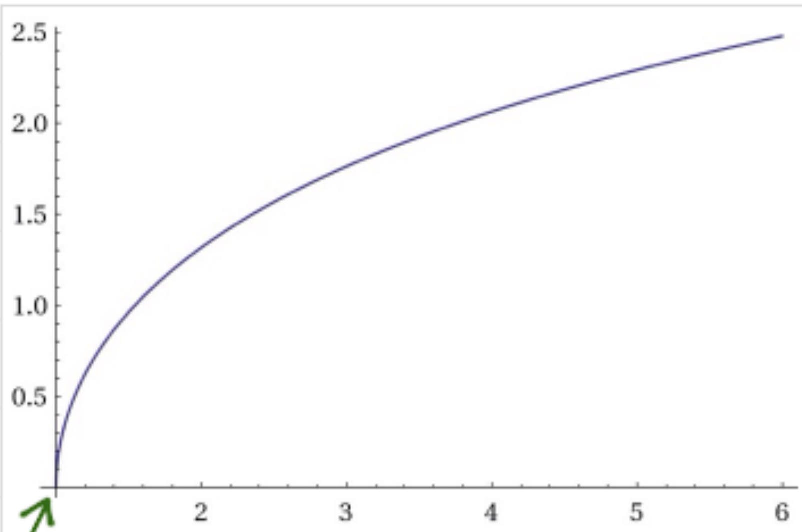
O.K.

$$t=\log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$

$$\operatorname{arch} y=\log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$



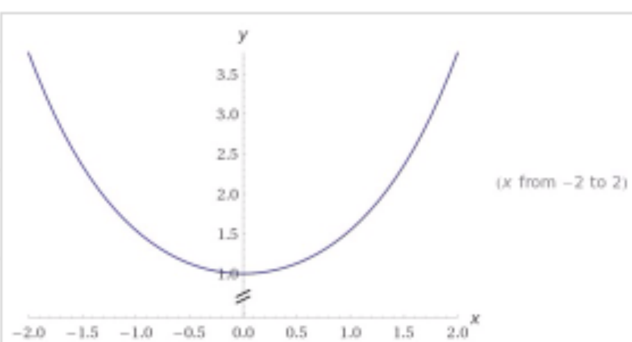
Wykres $x \longmapsto \operatorname{arsh}(x)$

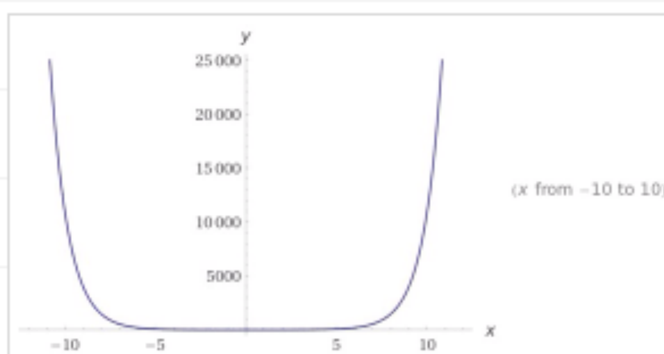


$x = 1$

Wykres $x \longmapsto \operatorname{arch}(x)$

Warto zwrócić uwagę, że dziedzina to $[1, \infty[$ bo sam cosinus hiperboliczny wygląda (chyba wszyscy wiedzą) tak





$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{tg^2 t+1}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t}}}$$

$$\left.\begin{aligned} x+1 &= tg\, t \\ dx &= \frac{1}{\cos^2 t}dt \end{aligned}\right| = \int \frac{dt}{\cos^2 t \; 1/\cos t} = \int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{\cos t}{\cos^2 t}dt$$

$$= \int \frac{du}{1-u^2} = \int \frac{du}{(1-u)(1+u)} =$$

$$\int \frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}\, du = -\frac{1}{2}\log(1-u) + \frac{1}{2}\log(1+u) + C = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) + C \;\; = ?$$

$$(x+1) = y = tg\, t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad y^2 = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \quad y^2(1-\sin^2 t) = \sin^2 t \quad y^2 = \sin^2 t\,(1+y^2)$$

$$\sin^2 t = \frac{y^2}{1+y^2} \quad \sin t = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\frac{1+\sin t}{1-\sin t} = \frac{1+\frac{y}{\sqrt{\;\;}}}{1-\frac{y}{\sqrt{\;\;}}} = \frac{\sqrt{\;\;}+y}{\sqrt{\;\;}-y} = \frac{(\sqrt{\;\;}+y)^2}{y^2+1-y} = (y+\sqrt{\;\;})^2$$

$$? = \log\left(1+x+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + c$$

Mozemy teraz porównać ten wynik z poprzednim uzyskanym inną metodą. Korzystając z przedstawienie funkcji area przy pomocy logarytmów łatwo stwierdzimy, że wyszło to samo!

$$\int_0^1 \frac{dx}{5+3\sqrt{1-x^2}}$$ proponowane podstawienie $x=\sin t$

$x=\sin t$, $dx=\cos t\,dt$, $1-x^2=1-\sin^2 t=\cos^2 t$

Gdy x zmienia się od 0 do 1 można wybrać t od 0 do $\pi/2$, wtedy $\cos t$ jest dodatni i $\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ bez żadnych modułów.

$$=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\,dt}{5+3\cos t}$$ wyszła funkcja wymierna od cosinusa, cosinus w liczniku i mianowniku w potędze nieparzystej (pierwszej)

nie ma więc wyjścia — podstawiamy tangens kąta połówkowego.

$$u=\operatorname{tg}\tfrac{t}{2} \quad du=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}dt=\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\tfrac{t}{2}\right)dt=\frac{1}{2}(1+u^2)dt$$

$$dt=\frac{2du}{1+u^2}$$

granice: $t=0 \to u=\operatorname{tg} t/2=0$

$t=\frac{\pi}{2} \to u=\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$

$$\cos t=\frac{\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

na przedziale $[0,\frac{\pi}{2}]$ $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ jest rosnący — nadaje się na podstawienie.

$$=\int_0^1 \frac{\frac{2du}{1+u^2}\,\frac{1-u^2}{1+u^2}}{5+3\,\frac{1-u^2}{1+u^2}}=$$

$$=\int_0^1 \frac{2(1-u^2)du}{(1+u^2)(5+5u^2+3-3u^2)}=\int_0^1 \frac{2(1-u^2)du}{(1+u^2)(8+2u^2)}=\int_0^1 \frac{(1-u^2)du}{(1+u^2)(4+u^2)}$$

$$\frac{1-u^2}{(1+u^2)(4+u^2)}=\frac{A}{1+u^2}+\frac{B}{4+u^2}=\frac{A(4+u^2)+B(1+u^2)}{(1+u^2)(4+u^2)}=\frac{(4A+B)+u^2(A+B)}{(1+u^2)(4+u^2)}$$

$4A+B=1$ $\quad A=\frac{2}{3}$

$A+B=-1$ $\quad B=-\frac{5}{3}$

$3A=2$

$$=\int_0^1\left(\frac{2/3}{1+u^2}-\frac{5/3}{4+u^2}\right)du=$$

verte

$$= \int_0^1 \frac{2/3}{1+u^2} - \frac{5/3}{4+u^2}\,du = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} \Big|_0^1 - \frac{5}{12}\int_0^1 \frac{du}{1+\left(\frac{u}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-0\right) + \frac{5}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{5}{6}\left(\operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{2}\right) - 0\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{5}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ostatnia funkcja w tym zadaniu: $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}}$ podstawienie $x = b\,\operatorname{tg} t$

$$\sqrt{x^2+b^2} = \sqrt{b^2\operatorname{tg}^2 t + b^2} = b\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{b}{\cos t}$$

$$x^2+a^2 = b^2\operatorname{tg}^2 t + a = \frac{b\sin^2 t + a\cos^2 t}{\cos^2 t} = \{b>a\} = \frac{(b^2-a^2)\sin^2 t + a^2}{\cos^2 t}$$

$$\frac{1}{b}\int \frac{\cos^3 t\,dt}{(b^2-a^2)\sin^2 t + a^2} = \int \frac{(1-y^2)\,dy}{(b^2-a^2)y^2+a^2} = \frac{-1}{b^2-a^2}\frac{1}{b}\int\left(1 - \frac{b^2}{(b^2-a^2)y^2+a^2}\right)dy$$

$y = \sin t \quad dy = \cos t\,dt$

$$1-y^2 = \frac{1}{b^2-a^2}\left(-(b^2-a^2)y^2 + b^2-a^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{(b^2-a^2)}\left[\underbrace{(b^2-a^2)y^2+a^2}-b^2\right]$$

$$= -\frac{1}{b(b^2-a^2)}y - \frac{b}{a^2(b^2-a^2)}\int \frac{dy}{\left(\frac{y\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)^2+1} = -\frac{y}{(b^2-a^2)b} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}y \cdot \frac{b}{a^{\cancel{2}}}\,\frac{\cancel{a}}{\sqrt{b^2-a^2}^{\,3}}$$

$$= -\frac{y}{b(b^2-a^2)} + \frac{b}{a\sqrt{}^{\,3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}y\right) + C$$

$y = \sin t \quad x = b\,\mathrm{tg}\,t \quad x^2 = b^2 \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \quad x^2(1-\sin^2 t) = b^2 \sin^2 t \quad (b^2+x^2)\sin^2 t =$

$= x^2 \quad \sin^2 t = \frac{x^2}{b^2+x^2} \quad \sin t = y = \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}$

$$= -\frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}\,(b^2-a^2)\cdot b} + \frac{b}{a\sqrt{b^2-a^2}^{\,3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}\,x}{a\sqrt{x^2+b^2}}\right) + C$$

A co będzie gdy $b<a$?

$(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2} \quad x = b\,\mathrm{tg}\,t \quad x^2+b^2 = \frac{b^2}{\cos^2 t} \quad (b^2\mathrm{tg}^2 t + a^2)\frac{b}{\cos t} =$

$$\frac{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}{\cos^3 t}\,b = \frac{b^2 + (a^2-b^2)\cos^2 t}{\cos^3 t}\,b = \frac{b^2+(a^2-b^2)(1-\sin^2 t)}{\cos^3 t}\,b =$$

$$\frac{(a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t)\,b}{(1-\sin^2 t)\cos t}$$

$$\frac{1}{b}\int \frac{(1-y^2)\,dy}{a^2-(a^2-b^2)y^2} = \frac{1}{b(a^2-b^2)}\int \frac{a^2-b^2-(a^2-b^2)y^2}{a^2-(a^2-b^2)y^2}\,dy = \frac{1}{b(a^2-b^2)}\,y -$$

ułamki proste

$$\frac{1}{b(a^2-b^2)}\int \frac{b^2\,dy}{(a-\sqrt{\ }\,y)(a+\sqrt{\ }\,y)} = \boxed{\frac{b}{(b^2-a^2)}\int \frac{\frac{1}{2a}}{a-\sqrt{\ }\,y} + \frac{\frac{1}{2a}}{a+\sqrt{\ }\,y}\,dy} =$$

$$\frac{y}{b(a^2-b^2)} + \frac{b}{2a(a^2-b^2)}\log(a-\sqrt{\ }\,y)\frac{1}{\sqrt{\ }} - \frac{1}{2a(a^2-b^2)}\log(a+\sqrt{\ }\,y)\cdot\frac{1}{\sqrt{\ }}$$

= ... rachunki i sprawdzenie znaków

samodzielnie...

Zadanie 3

(a) $$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{(1+t^2)\cancel{t}}\, 2\cancel{t}\,dt = 2\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg}^2 t\Big|_0^1 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$\left.\begin{aligned} t &= \sqrt{x} \\ dt &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \end{aligned}\right\} \longrightarrow dx = 2t\,dt$$

(c) $$\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} +$$

$$+\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \int_2^{\sqrt{3}} (-dt) =$$

$$t = \sqrt{4-x^2}$$

$$dt = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= 2\frac{\pi}{6} + 2 - \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + 2 - \sqrt{3}$$

(d) $$\int_1^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}} = \int_1^2 \frac{x\,dx}{x^4\sqrt{x^2+1}} = \left\{\begin{aligned} t &= \sqrt{x^2+1} \\ dt &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \\ t^2 &= x^2+1 \\ t^2-1 &= x^2 \end{aligned}\right\} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{dt}{(t^2-1)^2} =$$

$$\frac{1}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}$$

$$1 = A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t+1)(t-1)^2 + D(t-1)^2$$

$t=1$ $\quad 1 = 4B \quad B = 1/4$

$t=-1$ $\quad 1 = 4D \quad D = 1/4$

$t=0$ $\quad 1 = -A + B + C + D =$
$-A + \frac{1}{4} + C + \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} = C - A$

$t=2$

$$1 = 9A + 9B + 3C + D = 9A + \frac{9}{4}B + 3C + \frac{1}{4}D$$

$$1 - \frac{10}{4} = 9A + 3C \qquad -\frac{1}{2} = -C + A \qquad \frac{1}{2} = C + \frac{1}{4}$$

$$-\frac{6}{4} = 9A + 3C \qquad -\frac{1}{2} = 3A + C \qquad C = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2} = 3A + C \qquad -1 = 4A$$

$$B = C = D = 1/4 \quad A = -1/4 \qquad A = -1/4$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} -\frac{1/4}{t-1} + \frac{1/4}{(t-1)^2} + \frac{1/4}{(t+1)} + \frac{1/4}{(t+1)^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\log(t-1) - \frac{1}{t-1} + \log(t+1) - \frac{1}{t+1}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{t+1}{t-1}\right) - \frac{2t}{(t-1)(t+1)}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) - \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left((\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)\right) - \frac{1}{4}\log 4 - \frac{1}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

wydaje się nieprawdopodobne, żebym nie pomyliła rachunków...

(e) $$\int_0^{\pi}\frac{dx}{3+2\cos x}=\int_0^{\infty}\frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(3+2\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int_0^{\infty}\frac{2\,dt}{3+3t^2+2-2t^2}=\int_0^{\infty}\frac{2\,dt}{5+t^2}=$$

$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $\quad\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$

$$=\frac{2}{5}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+(t/\sqrt{5})^2}=\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}\Big|_0^{\infty}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

(f) $$\int_0^{\log 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=$$

$t=\sqrt{e^x-1}$ $\quad t^2=e^x-1$ $\quad e^x=t^2+1$

$dt=\frac{1}{\sqrt{\quad}}\,e^x\,dx$

$t\,dt=e^x\,dx$

$dx=\frac{t\,dt}{t^2+1}$

$$=\int_0^1 t\,\frac{t\,dt}{t^2+1}=\int_0^1\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt=\int_0^1 1-\frac{1}{t^2+1}\,dt=1-\int_0^1\frac{dt}{t^2+1}=1-(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=1-\pi/4$$

(h) $$\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n=$$

$f(x)=(x-a)^m$ $\quad g'(x)=(b-x)^n$

$f'(x)=m(x-a)^{m-1}$ $\quad g(x)=\frac{-1}{n+1}(b-x)^{n+1}$

$$=\underbrace{-\frac{1}{n+1}(x-a)^m(b-x)^{n+1}\Big|_a^b}_{0}+\frac{m}{n+1}\int_a^b(x-a)^{m-1}(b-x)^{n+1}\,dx=\frac{m}{n+1}\int_a^b(x-a)^{m-1}(b-x)^{n+1}\,dx=\frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdots\frac{1}{n+m}\int_a^b(b-x)^{n+m}\,dx=$$

$$\frac{m!\,n!}{(m+n)!}\left[\frac{-1}{m+n+1}(b-x)^{m+n+1}\right]\Big|_a^b=\boxed{\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1}}$$

(k)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{dx}{1+\sin^2 x}}_{f(x)} = \int_{-\pi}^{-\pi/2} f(x)dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)dx =$$

podstawienie $u = tg x$

$du = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1+u^2)dx$

$dx = \frac{1}{1+u^2} du \qquad \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{u^2}{1+u^2}$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\frac{du}{1+u^2}}{1+\frac{u^2}{1+u^2}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+2u^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{du}{1+2u^2} = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+2u^2} = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+(\sqrt{2}u)^2} =$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}u)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi\sqrt{2}$$

(g)
$$\int_0^{3/4} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} =$$

I podstawienie Eulera: $\sqrt{x^2+1} = x+t$

rachunki prowadzą do:

$x = \frac{1-t^2}{2t} \qquad (x+1) = \frac{1-t^2+2t}{2t} \qquad \sqrt{x^2+1} = \frac{1+t^2}{2t} \qquad x \in [0, 3/4] \qquad t \in [1/2, 1]$

$dx = -\frac{1}{2}\frac{1+t^2}{t^2}$

$$= \int_1^{1/2} \frac{-\frac{1}{2}\frac{(1+t^2)}{t^2}dt}{\frac{(1-t^2+2t)(1+t^2)}{4t^2}} = 2\int_1^{1/2} \frac{dt}{t^2-2t-1} =$$

$$2\int_1^{1/2} \frac{dt}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})} =$$

$$2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^{2} \left\{ \frac{1}{t-1-\sqrt{2}} - \frac{1}{t-1+\sqrt{2}} \right\} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[-\log(1+\sqrt{2}-t) - \log(t-1+\sqrt{2}) \Big]_1^{1/2}$$

uwaga na zmianę znaku! Dlaczego tak trzeba?

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\log\left(2t+1-t^2\right)\right)\Big|_1^{1/2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left(1+1-\frac{1}{4}\right)-\log\left(2+1-1\right)\right] =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log 7/4 - \log 2\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log 7 - 3\log 2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(3\log 2 - \log 7\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(8/7\right)$$

(n) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,dx$

$$\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\cdot\frac{2i}{e^{ix}-e^{-ix}} = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{e^{ix}-e^{-ix}} = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})}{(e^{ix}-e^{-ix})}\Big(e^{i(n-1)x}+e^{i(n-2)x}e^{-ix}+$$

$$+\dots+e^{-(n-1)x}\Big) =$$

$$= \begin{cases} n=2k+1 & 2\cos(n-1)x+2\cos(n-3)x+\dots+2\cos(2x)+1 \\ n=2k & 2\cos(n-1)x+2\cos(n-3)x+\dots+2\cos x \end{cases} =$$

$$\int_0^{\pi}\cos mx = \frac{1}{m}\sin(mx)\Big|_0^{\pi} = 0$$

Wkłady od wszystkich składników z wyjątkiem stałego są zerowe. Ostatecznie $\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x} = \begin{cases} 0 & n=2k \\ \pi & n=2k+1 \end{cases}$

(j)

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2} = \begin{matrix} x = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,t \\ dx = \frac{1}{2\cos^2 t}\,dt \end{matrix} \quad \int_0^{\mathrm{arctg}\,2} \frac{1}{2}\,\frac{dt}{\cos^2 t}\,\underbrace{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}_{\frac{1}{\cos t}} = \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{arctg}\,2} \frac{dt}{\cos^3 t} =$$

$$\int_0^{\mathrm{arctg}\,2} \frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{?} \frac{du}{(1-u^2)^2}$$

Całkę z funkcji wymiernej liczymy samodzielnie. Policzymy jeszcze górną granicę całkowania

$$\mathrm{tg}\,t = 2 \longrightarrow \sin t = ? \qquad \frac{\sin t}{\cos t} = 2 \qquad \sin t = 2\cos t \qquad \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$4\cos^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \cos^2 t = 1/5 \qquad \sin^2 t = 4/5 \qquad \sin t = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Górna granica całkowania

(l)

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin x(\sin x+\cos x)} = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,dx = \begin{matrix} u = \mathrm{tg}\,x \\ \frac{du}{1+u^2} = dx \end{matrix}$$

$f(x)$

$$\sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2} \qquad \sin x\cos x = \frac{u}{1+u^2}$$

$$3u^2+2u+1 = 3\left(u^2+\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}\right) = 3\left(\left(u+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right) = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1/(1+u^2)\;du}{1+2\frac{u^2}{1+u^2}+2\frac{u}{1+u^2}} + \int_{-\infty}^{0} \frac{du}{1+2u+3u^2} = \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,du$$

$$= \frac{3}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sqrt{2}}{3} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$