Analiza II, ćwiczenia

Katarzyna Grabowska, Javier de Lucas, Wiesław Pusz

26 lutego 2014

1 Ciągi i szeregi funkcyjne

Zadanie 4 Zbadać zbieżność (punktową i jednostajną) ciągu funkcji

$$\text{(a)} \quad f_n : [0, \infty[\ni x \longmapsto \frac{nx^2 + x}{nx^2 + 1}, \qquad \text{(b)} \quad f_n = \frac{1}{1 + n(nx^2 - n - 1)^2}$$

Przy okazji tego zadania można przedyskutować różnice miedzy zbieżnością punktową a jednostajną. Warto narysować wykresy kilku f_n, żeby zobaczyć jak to wygląda na obrazku.

Zadanie 5 Zastosowanie twierdzenia o ciągłości funkcji granicznej (wybrać jakiś przykład) Czy poprawne są wyliczenia (uzasadnić)

1. $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{(x + n - 1)^2 + n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + n} = s \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} = 2$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1 + nx^2} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \cdot 0^2}{1 + n \cdot 0^2} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} x(1 - x)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{(2 + x)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2x^2} = 0$

Zadanie 6 Coś o różniczkowaniu wyraz po wyrazie. Wykazać, że f jest klasy $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}$ jeśli

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{nx^2 + 3}}{n^2}$$

Zadanie 7 Coś o całkowaniu wyraz po wyrazie. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx \exp(-nx^2) \mathsf{d}x, \qquad \int_0^1 [\lim_{n\to\infty} nx \exp(-nx^2)] \mathsf{d}x.$$

Wyjaśnić uzyskane wyniki.

$$= \frac{3}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{3u+1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{2}}{3}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

Zadanie 7

Liczymy oba wyrażenia zachowując kolejność przechodzenia do granicy i całkowania:

$$\int_0^1 nx\exp(-nx^2)\,dx = \left\{\begin{array}{l} t=x^2 \\ dt=2x\,dx \\ x\,dx=\frac{dt}{2} \end{array}\right\} = \int_0^1 n\exp(-nt)\frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}\exp(-nt)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\exp(-n)-1\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp(-n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp(-n)\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(nx\exp(-nx^2)\right) = 0 \qquad \int_1^2 0\cdot dx = 0$$

Sprawdzimy teraz skąd wzięła się rozbieżność wyników. Zdefiniujemy ciąg funkcyjny $f_n(x) = nx\exp(-nx^2)$ i sprawdzimy jak zachowuje się na odcinku $[0,1]$. Już wiemy, że granicą punktową tego ciągu jest funkcja stała równa 0. Jaki jednak jest charakter tej zbieżności? Żeby to sprawdzić przeprowadzimy ograniczone (tylko niektóre elementy) badanie funkcji f_n.

$$f_n(x) = nx\exp(-nx^2)$$

$$f_n(0)=0 \quad f_n(1) = n\exp(-n) \quad f_n'(x) = n\exp(-nx^2) + nx\exp(-nx^2)(-2nx) =$$

$$= \exp(-nx^2)\left[n-2n^2x^2\right] = \exp(-nx^2)\cdot n\cdot\left[1-2nx^2\right]$$

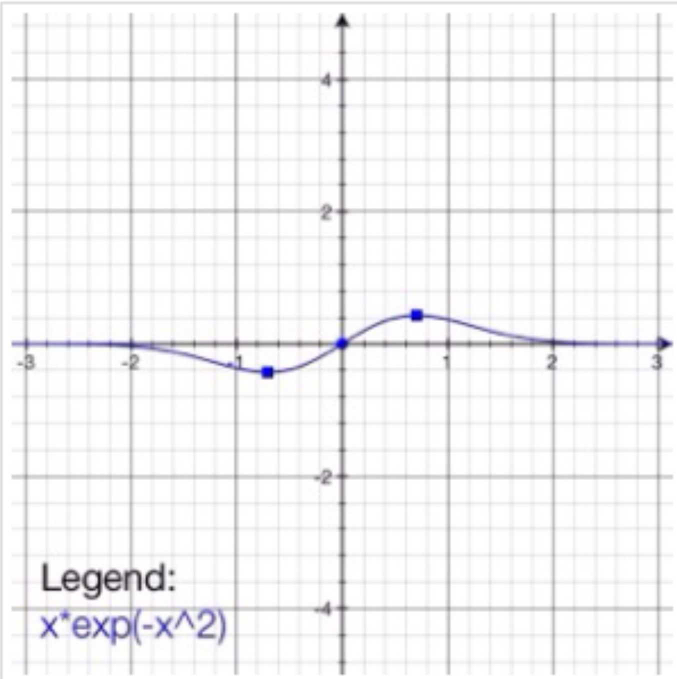
$$f_n'(x)=0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}} \qquad x = -\frac{1}{\sqrt{\ }} \text{ minimum} \qquad x = +\frac{1}{\sqrt{\ }} \text{ maksimum}$$

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = n\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}\exp\left(-n\frac{1}{2n}\right) = \sqrt{\frac{n}{2}}\exp\left(-1/2\right) = \sqrt{\frac{n}{2e}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

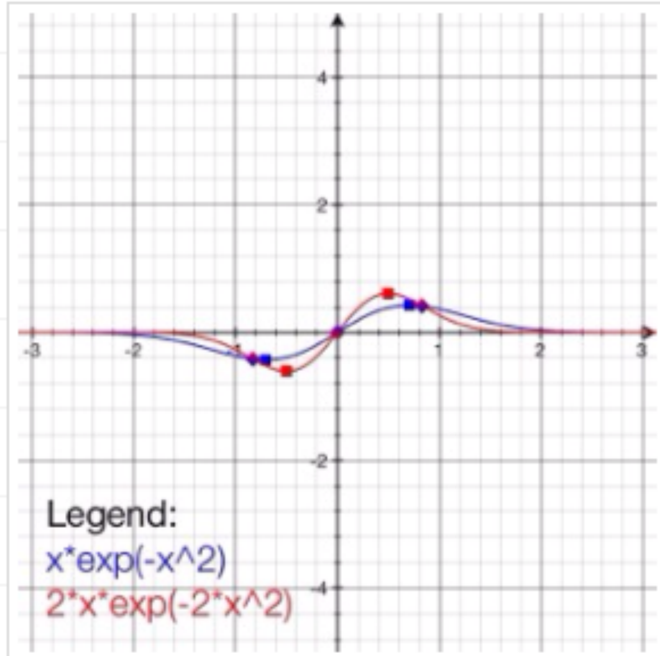
Okazuje się, że w odcinku $[0,1]$ f_n ma maksimum w punkcie $x = 1/\sqrt{2n}$. Ponadto wartości w punkcie maksymalnym jest $\sqrt{\frac{n}{2e}}$ i rośnie nieograniczenie wraz z n.

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x) - \underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{f_\infty(x)}\right| = \sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)\right| = \sqrt{\frac{n}{2e}} \longrightarrow \infty$$

W tej sytuacji ciąg funkcyjny nie dąży do funkcji granicznej jednostajnie na $[0,1]$ zatem twierdzenie o całkowaniu wyraz po wyrazie nie ma tu zastosowania. Różnica w wynikach bierze się właśnie z niejednostajności zbieżności.

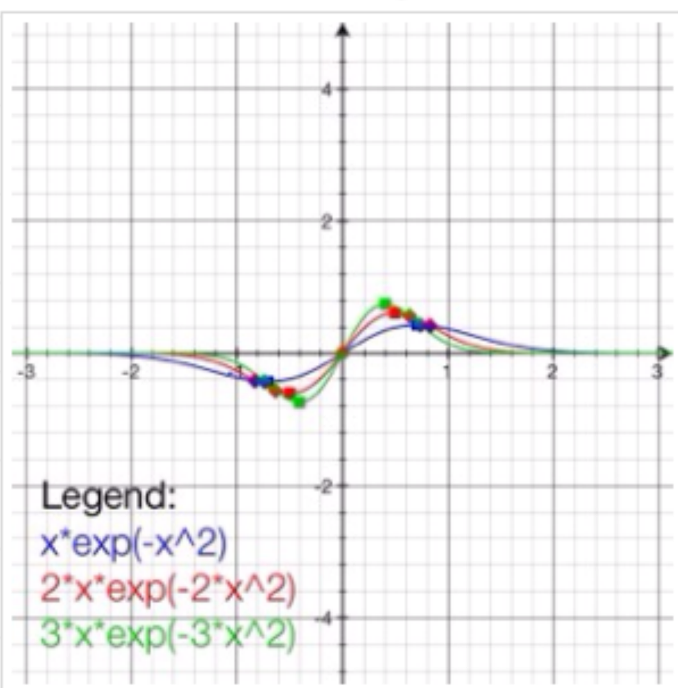


f_1

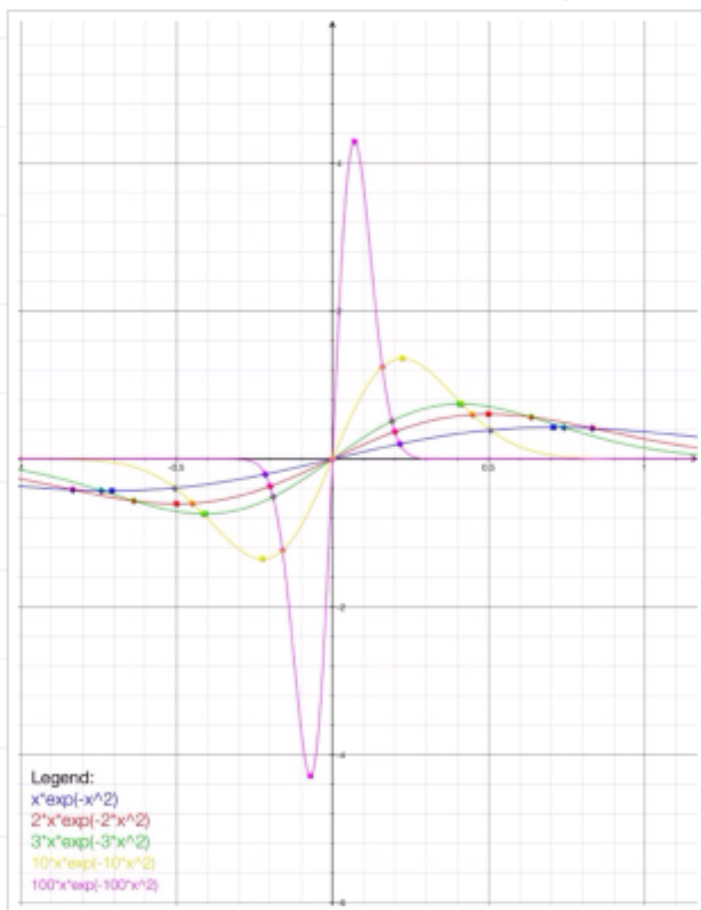


f_1, f_2

f_1, f_2, f_3



$f_1, f_2, f_3, f_{10}, f_{100}$



Zadanie 6.

Twierdzenie o różniczkowaniu wyraz po wyrazie mówi że funkcja graniczna jest klasy C^1 jeśli ciąg pochodnych jest zbieżny jednostajnie i ciąg wyjściowy jest zbieżny punktowo przynajmniej w jednym punkcie. Szereg funkcyjny rozumiemy oczywiście jako ciąg sum częściowych. Definiujemy więc

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^3} \qquad f(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x)$$ i pytamy o

różniczkowalność funkcji f. Przydatne będzie jeszcze oznaczenie

$$u_k(x) = \frac{\sin(kx)}{k^3}$$

$$u_k'(x) = -3k^{-4}\sin(kx) + k^{-3}\cos(kx)\cdot k = \frac{\cos kx}{k^2} - \frac{3\sin kx}{k^4}$$

$$F_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

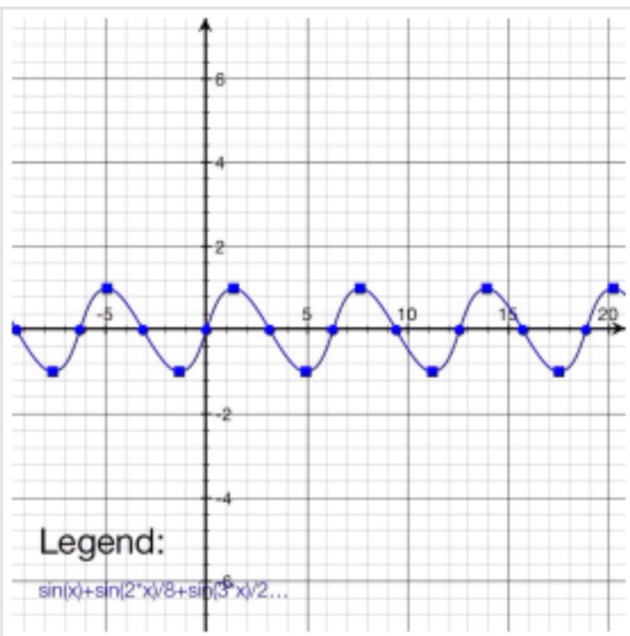
Czy F_n' jest zbieżny jednostajnie? Oszacujmy:

$$|u_k'(x)| = \left| \frac{\cos kx}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

Szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ jest zbieżny

zatem szereg pochodnych jest jednostaj-
nie zbieżny na mocy kryterium Weierstrassa

Pozostaje do sprawdzenia czy szereg wyjściowy jest zbieżny
przynajmniej w jednym punkcie. Tu wystarczy wziąć $x=0$.



Na obrazku $x \longmapsto F_5(x)$

Zadanie 4

$$f_n(x) = \frac{nx^2+x}{nx^2+1} \qquad f_n : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2+x}{nx^2+1} = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Funkcja graniczna jest nieciągła w $x=0$ zatem zbieżność nie jest jednostajna na $[0,\infty[$

$$f_n(0) = 0 \qquad f_n(1) = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{nx^2+x}{nx^2+1} = 1$$

$$f_n'(x) = \frac{(2nx+1)(nx^2+1) - 2nx(nx^2+x)}{(x^2n+1)^2}$$

zajmujemy się tylko licznikiem

$$\text{licznik} = \cancel{2n^2x^3} + 2nx + nx^2 + 1 - \cancel{2n^2x^3} - 2nx^2 =$$

$$= -nx^2 + 2nx + 1 \qquad \Delta = 4n^2 + 4n$$

$$\sqrt{\Delta} = 2n\sqrt{1+1/n}$$

$$x_n^{\pm} = \frac{2n \pm 2n\sqrt{1+1/n}}{2n} = 1 \pm \sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

$x_n^- < 0$, interesuje nas zatem jedynie x_n^+

$$f_n(x_n^+) = \dots = 1 + \frac{\sqrt{1+1/n}}{2n+2+2n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f_\infty(x)| = 1 \not\to 0$$

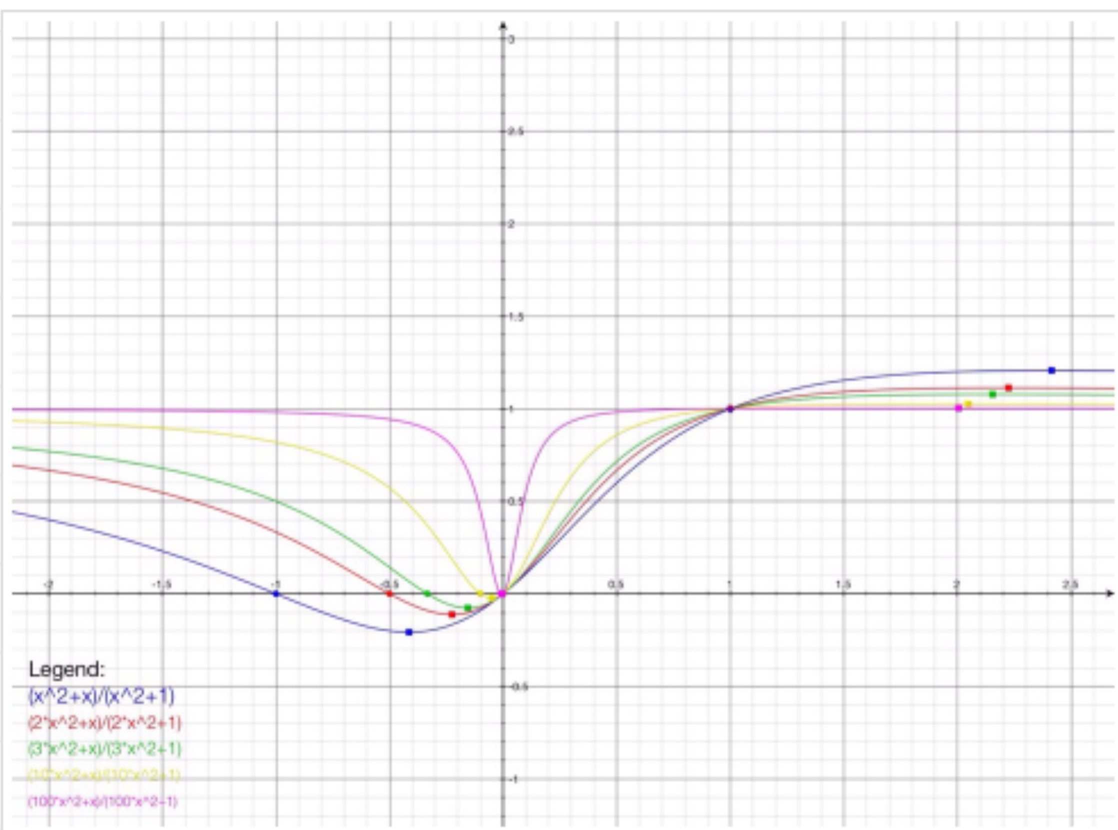
zatem zbieżność nie jest jednostajna na I

Jednak na każdym odcinku $[a,+\infty[$ $a>0$ ciąg jest zbieżny jednostajnie gdyż

$$\sup_{x\in[a,\infty[} |f_n(x)-1| = \max\left\{\frac{na^2+a}{na^2+1}-1,\ f_n(x_n^+)-1\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{\cancel{na^2}+a-\cancel{na^2}-1}{na^2+1},\ \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2n+2+2n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$f_1, f_2, f_3, f_{10}, f_{100}.$



Zadanie5

1. $\lim\limits_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^2+1}{(x+n-1)^2+n}}_{u_n}$

Badamy u_n na odcinku $[0,2]$

Punktowo szereg $\sum u_n(x)$ jest zbieżny

(II kryt. porównawcze z $\sum \frac{1}{n^2}$)

$$u_n(0)=\frac{1}{n^2-n+1} \qquad u_n(2)=\frac{5}{n^2+3n+1}$$

$$u_n'(x)=\left[2x\left\{(x+n-1)^2+n\right\}-2(x+n-1)(x^2+1)\right] \Big/ \left[(x+n-1)^2+n\right]^2$$

sam licznik:

$$2\left\{x\left(x^2+2(n-1)x+(n-1)^2+n\right)-\left(x^3+nx^2-x^2+x+n-1\right)\right\}=$$

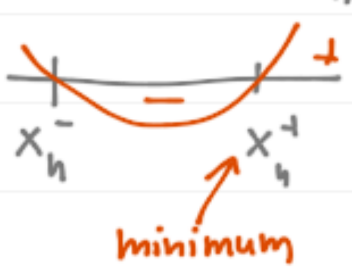
$$2\left\{\cancel{x^3}+\underline{2(n-1)x^2}+\underline{(n-1)^2x}+\underline{nx}-\cancel{x^3}\underline{-nx^2}+\underline{x^2}\underline{-x}\underline{-n+1}\right\}=$$

$$=2\left\{(n-1)x^2+(n-1)nx-(n-1)\right\}=$$

$$=2(n-1)\left\{x^2+nx-1\right\} \qquad \Delta=n^2+4$$

$$x_n^{\pm}=\frac{-n\pm\sqrt{n^2+4}}{2} \qquad x_n^-<0$$

$$x_n^+=\frac{\sqrt{n^2+4}-n}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$



x_n^+ jest minimum lokalnym u_n $\qquad x_n^+ \in [0,2]$

Oznacza to, że na odcinku $[0,2]$ funkcja u_n przyjmuje wartości największe na brzegu, tam w punkcie $x=0$ lub $x=2$

$$\sup_{x\in[0,2]} |u_n(x)| = \max\left\{\frac{1}{n^2-n+1}, \frac{5}{n^2+3n+1}\right\}$$

Sprawdzamy $\frac{1}{n^2-n+1} \overset{?}{<} \frac{5}{n^2+3n+1}$ nierówność jest więc prawdziwa

$$n^2+3n+1 < 5n^2-5n+5$$

$$-4n^2+2n-4 < 0$$

$$-2n^2+n-2 < 0$$

$$2n^2-n+2 > 0$$

zawsze dodatnie

$$2\left(n^2-\frac{1}{2}n+1\right) = 2\left(\left(n-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\right)$$

$|u_n(x)| \leq \frac{5}{n^2+3n+1} = a_n$ $\quad \sum a_n$ zbieżny

na $[0,2]$

Mozna zatem skorzystać z tw. Weierstrassa zeby wykazać, ze szereg $\sum u_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na odcinku $[0,2]$. Funkcja graniczna jest ciągła, zatem rachunek zaprezentowany w treści zadania jest legalny.