Zadanie 8

Rozwinąć w szereg potęgowy wokół punktu $x_0 = 0$. Zbadać promień zbieżności otrzymanego szeregu:

$$f(x) = \arcsin x$$

$$g(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$h(x) = \frac{1}{2}\left[\log(1-x)\right]^2$$

Zadanie 9

Zapisać funkcję zdefiniowane jako sumy szeregów poprzez funkcje elementarne

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2}{(n+2)n!} x^n$$

wskazówka

badać $f(x) - e^x$

Zadanie 10.

Obliczyć sumy szeregów liczbowych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2-5n-1}{2^n}$$

Zadanie 8. 3.03.2014

$$x \xmapsto{f} \arcsin x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \varphi(x^2) \qquad \varphi(y) = (1-y)^{-1/2}$$

Dalej rozwijamy funkcję $y \longmapsto \varphi(y)$ $y_0=0$

$$\varphi(0) = 1$$

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{2}(1-y)^{-3/2}(-1) = \frac{1}{2}(1-y)^{-3/2} \qquad n=1$$

$$\varphi''(y) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1-y)^{-5/2}(-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)(1-y)^{-5/2} \qquad n=2$$

$$\varphi^{(3)}(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)(1-y)^{-7/2} \qquad n=3$$

$$\varphi^{(n)}(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2}\right)(1-y)^{-\frac{2n-1}{2}} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}(1-y)^{-\frac{2n+1}{2}}\Bigg|_{y=0} =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

$$\varphi(y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} y^n$$

$$f'(x) = \varphi(x^2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}$$

Szereg potęgowy można całkować wyraz po wyrazie:

$$c_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} \qquad c_{2n+1} = 0$$

$$c_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} \qquad c_{2n+1} = 0$$

$$\int c_{2n} x^{2n}\, dx = \underbrace{\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{1}{2n+1}}_{a_{2n+1}} x^{2n+1} + C \qquad a_{2n} = 0$$

$$f(x) = C + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n (2n+1)\, n!} x^{2n+1}$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2\cdot 3} x^3 + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 2} x^5 + \frac{\cancel{3}\cdot 5}{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\,2} x^7 + \dots$$

$$= x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \frac{5}{112} x^7 + \dots$$

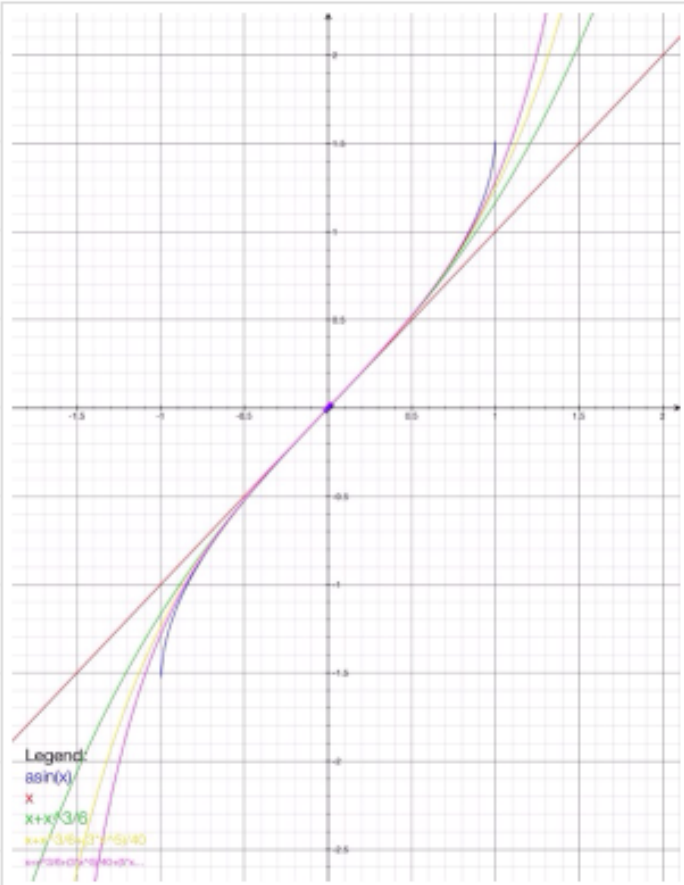
Wypada sprawdzić promień zbieżności:

$$\sqrt[2n]{\frac{(2n-1)!!}{2^n (2n+1)\, n!}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[2n]{(2n+1)}}}_{\to 1} \underbrace{\sqrt[2n]{\frac{(2n-1)!!}{n!}}}_{\sqrt{2}}$$

to można wy policzyć korzystając z faktu, że $\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$ jeśli granica po prawej istnieje

$$\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \frac{n!}{(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{n+1} \longrightarrow 2$$

$n \to \infty$



Kolejne wielomianowe przybliżenia funkcji $x \longmapsto \arcsin x$

na różowo przybliżenie wielomianem siódmego stopnia.

Rozwijamy dalej funkcję $x \overset{g}{\longmapsto} \operatorname{arctg} x$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x-i)(x+i)} = \frac{1/2i}{(x-i)} - \frac{1/2i}{(x+i)}$$

$$\frac{1}{2i}\,\frac{1}{x-i} = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{i\left(\frac{x}{i}-1\right)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{x}{i}-1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{i}} \overset{|x|<1}{=} \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{i}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n x^n$$

$$\frac{1}{2i}\,\frac{1}{x+i} = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{i\left(\frac{x}{i}+1\right)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{i}\right)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{i}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} i^n x^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n x^n - \left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty} i^n x^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n x^n - \left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty} i^n x^n =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-i)^n + (i)^n\right)x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{\pi}{2}n} + e^{\frac{\pi}{2}n}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)x^n =$$

$$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} n=2k & (-1)^k \\ n=2k+1 & 0 \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{(-1)^k}_{c_{2k}} x^{2k}$$

g jest funkcją pierwotną do $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ zatem całkujemy powyższy szereg wyraz po wyrazie

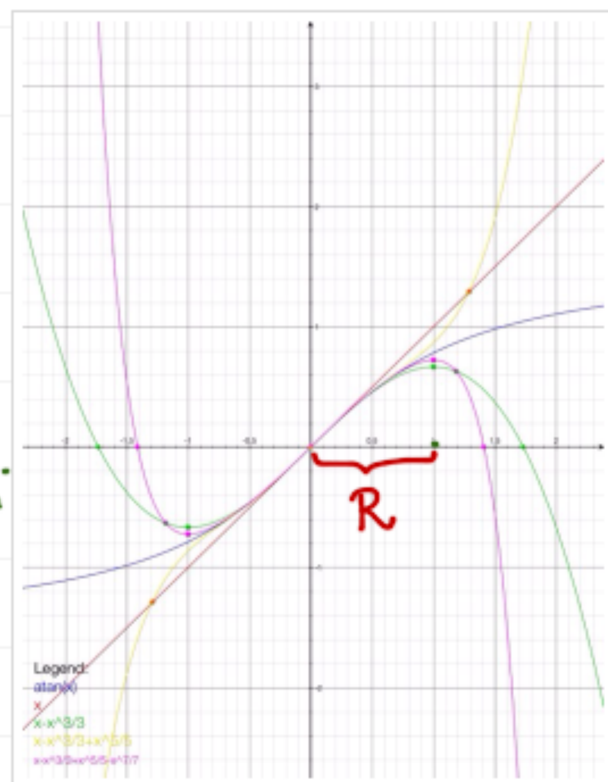
$$g(x) = C + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} =$$

$g(0)=0$

$C=0$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots$$

Promień zbieżności to $R=1$



Na różowo przybliżenie rzędu 7.
Widać, że poza obszarem zbieżności wszystko się psuje

$$h(x)=\frac{1}{2}\left(\log(1-x)\right)^2 \quad h'(x)=\underbrace{\log(1-x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-x}}(-1) \quad x_0=0$$

Rozwijać będziemy, tak jak poprzednio, pochodną funkcji występującej w treści zadania. Pochodna ta jest iloczynem dwóch funkcji, których rozwinięcia są znane:

$$\frac{1}{1-x}\overset{|x|<1}{=}\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad \log(1-x)\overset{|x|<1}{=}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$h'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\right)=\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)=$$

$$=x+x^2+\frac{x^2}{2}+x^3+\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3}+x^4+\frac{x^4}{2}+\frac{x^4}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$$=x+x^2\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)}+x^3\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}+x^4\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}+\cdots$$

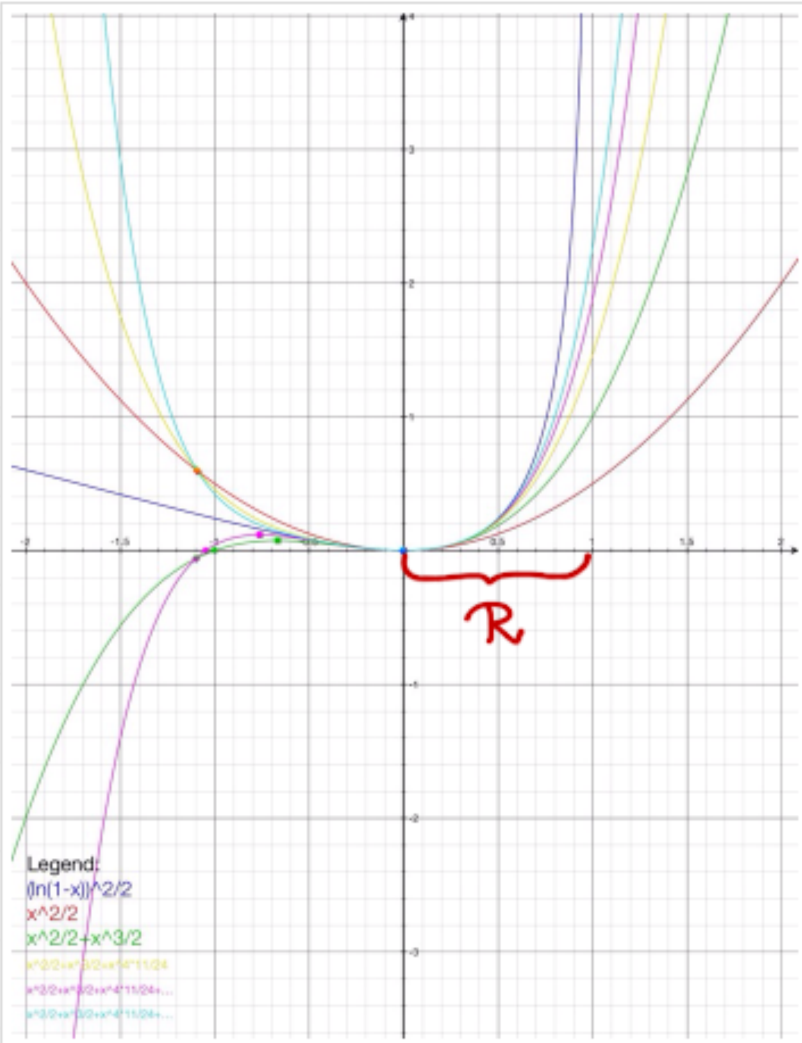
sumy częściowe szeregu harmonicznego $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}H_n x^n$$

W takim razie $\quad h(x)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n+1}x^{n+1}$ $\quad C=0$

$$h(0)=\frac{1}{2}\log(1)^2=0$$

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n+1}x^{n+1} \qquad R=1.$$



Na niebiesko przybliżenie rzędu 6

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{11}{24}x^4+\frac{10}{24}x^5+\frac{137}{360}x^6$$

Zadanie 9

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-2)}{(n+2)n!}x^n$$

Zacznijmy od badania promienia zbieżności:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n-2}{(n+2)n!}}=\frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n!}}_{\to\infty}}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{1-\frac{4}{n+2}}}_{\to 1}=0 \Rightarrow R=\infty$$

Szereg jest zbieżny dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$.

$$f(x)-\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n-2}{(n+2)n!}-\frac{1}{n!}\right]x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-2-n-2}{(n+2)n!}x^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{(n+2)n!}x^n=-\frac{4}{x^2}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}}_{=g(x)}$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}\qquad g'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\cancel{(n+2)}n!}\cancel{(n+2)}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x\exp(x)$$

$g'(x)=x\exp(x)\rightarrow g(x)=\int x\exp(x)\,dx$ przewidujemy

$g(x)$ w postaci $(Ax+B)\exp(x)$ wtedy $g'(x)=A\exp(x)+$

$+(Ax+B)\exp(x)=(Ax+A+B)\exp(x)\rightarrow A=1\quad A+B=0\quad B=-1$

$g(x)=(x-1)\exp(x)+C$

z przedstawienia funkcji g w postaci szeregu wiemy, że

$g(0)=0$ zatem $0=(0-1)\exp(0)+C=-1+C\Rightarrow C=1$

Ostatecznie $g(x)=(x-1)\exp(x)+1$

$$f(x)-\exp(x)=-\frac{4}{x^2}\left[(x-1)\exp(x)+1\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{f(x)=\left[\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x}+1\right]\exp(x)-\frac{4}{x^2}}$$