Zadanie 8

Rozwinąć w szereg potęgowy wokół punktu $x_0 = 0$. Zbadać promień zbieżności otrzymanego szeregu:

$f(x) = \arcsin x$

$g(x) = \operatorname{arctg} x$

$h(x) = \frac{1}{2}\left[\log(1-x)\right]^2$

Zadanie 9

Zapisać funkcję zdefiniowane jako sumy szeregów poprzez funkcje elementarne

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2}{(n+2)n!} x^n$$

wskazówka
badać $f(x) - e^x$

Zadanie 10.

Obliczyć sumy szeregów liczbowych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2-5n-1}{2^n}$$

Zadanie 10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)}$$ Badamy funkcję $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(4n^2-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)(2n+1)}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\left[\frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{2}x \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}}_{g(x)} - \frac{1}{2x} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}_{h(x)}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \Rightarrow g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$g(x) = \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}\,dx = -\frac{1}{2}\log(1-x) + \frac{1}{2}\log(1+x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad (+C$$

$$g(0) = 0 \to C = 0 \qquad g(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \Rightarrow h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} - 1$$

$$h(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x + C \qquad h(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] - \frac{1}{2x}\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left[x - \frac{1}{x}\right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{x^2-1}{x} + \frac{1}{2}$$

do policzenia mamy $\lim_{x \to 1} f(x)$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{4}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{x^2-1}{x}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\left[\left(\log(1+x)-\log(1-x)\right)(x-1)(x+1)\cdot\frac{1}{x}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\left[\underbrace{(1+x)}_{2}\underbrace{(x-1)}_{0}\underbrace{\log(1+x)}_{2}+\underbrace{(x+1)}_{2}\underbrace{\boxed{(1-x)\log(1-x)}}_{0}\right]\underbrace{\frac{1}{x}}_{1}=0$$

Oznacza to, że $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\dots$$

Zauważmy że podstawienie $x=1$ wymaga użycia twierdzenia Abela, które mówi, że jeżeli na granicy obszaru zbieżności szereg jest zbieżny to wówczas jest zbieżny do wartości funkcji, którą definiuje wewnątrz obszaru zbieżności. Tu podstawienie $x=1$ było właśnie wstawieniem wartości na granicy obszaru zbieżności. Jednak wiadomo, że można to zrobić, gdyż szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ jest zbieżny (wielomian kwadratowy od n w mianowniku).

Uwaga! Ten szereg można zsumować prościej. Jeśli wiemy już, że jest zbieżny, możemy dokonywać różnych operacji rachunkowych:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1/2}{2n-1}-\frac{1/2}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\dots+\cancel{\frac{1}{2m-1}}-\frac{1}{2m+1}\right)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)=\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\frac{2m}{2m+1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

Suma częściowa tego szeregu to $S_m=\frac{m}{2m+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{n(n+1)}$ Szereg jest zbieżny (np. pierwsze kryterium porównawcze z szeregiem $\sum\frac{1}{2^n}$).

Badamy funkcję $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x/2)^n}{n(n+1)}$ Właściwie pewnie łatwiej będzie zająć się funkcją $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ i potem obliczyć $g(1/2)$.

Sumujemy więc $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)n}=\frac{1}{x}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}}_{h(x)}=\frac{1}{x}h(x)$$

$$h'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cancel{(n+1)}}\cancel{(n+1)}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\log(1-x)$$

$$h'(x)=-\log(1-x)$$

$$h(x)=-\int\log(1-x)=\left|\begin{matrix} u(x)=\log(1-x) & v'(x)=1\\ u'(x)=-\frac{1}{1-x} & v(x)=x\end{matrix}\right|=-\Big[x\log(1-x)-$$

$$-\int\frac{x}{x-1}\,dx\Big]=-\Big[x\log(1-x)-\int\Big(1+\frac{1}{x-1}\Big)dx\Big]=-\Big[x\log(1-x)-x-$$

$$\log(1-x)\Big]=-x\log(1-x)+x+\log(1-x)+C$$

$$h(0)=0\Rightarrow C=0$$

$$g(x)=\frac{1}{x}h(x)=-\log(1-x)+1+\frac{1}{x}\log(1-x)$$

$$g\left(\tfrac{1}{2}\right)=-\log\left(\tfrac{1}{2}\right)+1+\frac{1}{\frac{1}{2}}\log\frac{1}{2}=$$

$$=\log 2+1-2\log 2=1-\log 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{n(n+1)}=1-\log 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\,n\,(n+1)}=1-\log(2)$$

Tym razem nie widać już sposobu na proste rachunki niż z użyciem zamiany zwykłego szeregu na potęgowy. Chyba, że Wolfram Alpha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2-5n-1}{2^n} = ?$$

$$2n^2-2n-3n-1 = 2n(n-1)-3n-1$$

Szukam najpierw $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right)$ dla $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\underbrace{x^{n-2}}_{=(x^{n-1})'} =$$

$$= x^2 \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=2}^{\infty} n \underbrace{x^{n-1}}_{(x^n)'}\right) = x^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=2}^{\infty} x^n\right) =$$

$$= x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right) = x^2 \frac{d}{dx}\left((+1)(1-x)^{-2} - 1\right) = x^2\left(2(1-x)^{-3}\right) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

Teraz szukam $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ jako $g\left(\frac{1}{2}\right)$ dla $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n\underbrace{x^{n-1}}_{(x^n)'} = x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) =$$

$$= x\,(1-x)^{-2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2-5n-1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n(n-1)}{2^n} - \frac{3n}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} - 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} +$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 3g\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 2\cdot\frac{2\cdot(1/2)^2}{(1-1/2)^3} - 3\,\frac{1/2}{(1-1/2)^2} - 2 =$$

$$= 8 - 6 - 2 = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,n^2 - 5\,n - 1}{2^n} = 0$$

WolframAlpha test poprawności rachunków

KARTKÓWKA NR 1

$$\int_0^1 \frac{dx}{5+4\sqrt{1-x^2}} =$$

Podstawiamy $x = \sin t$ $\quad dx = \cos t\,dt$

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\,dt}{5+4\cos t} =$$

Podstawiamy $u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ $\quad dt = \frac{2\,du}{1+u^2}$

$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{(1-u^2)}{(1+u^2)}\frac{2}{(1+u^2)}\,du}{5+4\frac{1-u^2}{1+u^2}} = 2\int_0^1 \frac{(1-u^2)\,du}{(1+u^2)(9+u^2)} = 2\int_0^1 \left(\frac{1/4}{1+u^2} - \frac{5/4}{9+u^2}\right)du =$$

$$\frac{A}{1+u^2} + \frac{B}{9+u^2} = \frac{9A + Au^2 + B + Bu^2}{(1+u^2)(9+u^2)}$$

$$\begin{aligned} 9A+B &= 1 \\ A+B &= -1 \\ \hline 8A &= 2 \end{aligned}$$

$A = 1/4 \quad B = -5/4$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u \Big|_0^1 - \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{du}{9(1+(u/3)^2)} = \frac{\pi}{8} - \frac{5}{18}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{3}\right)\cdot 3 \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \approx 0{,}123457\ldots$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{5+4\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{12}\left(5\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) - \pi\right) \approx 0.124574}$$

Bardzo ciekawe rachunki dostajemy, gdy w tej samej całce użyjemy drugiego podstawienia Eulera.

$$\sqrt{1-x^2} = tx+1$$

$$1-x^2 = t^2x^2+2tx+1$$

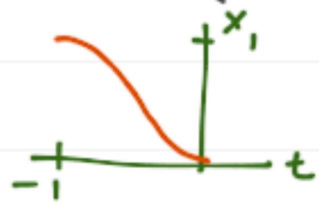
$$-x = t^2x+2t$$

$$(t^2+1)x = -2t$$

$$x = -\frac{2t}{t^2+1}$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1-\frac{2t^2}{t^2+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = -\frac{2t^2+2-4t^2}{(t^2+1)^2} = -2\,\frac{t^2-1}{t^2+1}$$



$$\int_0^1 \frac{dx}{5+4\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^{-1} \frac{\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}\,dt}{5+4\,\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int_{-1}^{0} \frac{1-t^2}{(1+t^2)(9+t^2)}$$

Ostatecznie dostaliśmy tę samą całkę z funkcji wymiernej. Granice całkowania $[-1,0]$ można zamienić na $[0,1]$ bo funkcja podcałkowa jest symetryczna ze względu na zamianę t na $-t$.