Zadanie 11 Wiadomo, ze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Dokonując stosownych podstawień i rozwijając funkcję podcałkową w szereg wykazać, że

$$\text{(a)} \quad \int_0^\infty \frac{x\,\mathsf{d}x}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^\infty \frac{x\,\mathsf{d}x}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \text{(c)} \quad \int_0^\infty \log(1-e^{-x})\,\mathsf{d}x = \frac{\pi^2}{12}.$$

Zadanie 15 Niech $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy $[t^i_j]$ w bazach kanonicznych. Wyznaczyć $\|T\|$ jeśli (a) w $\mathbb{R}^n$ $\|x\| = |x^1|+\cdots+|x^n|$ zaś w $\mathbb{R}^m$ $\|x\| = max_{i=1\ldots m}|x^i|$, (b) w obu przestrzeniach $\|x\| = max_i|x^i|$.

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1}$$

$$f(x) = \frac{x}{e^x+1} = e^{-x}\frac{x}{1+e^{-x}} = xe^{-x}\frac{1}{\underbrace{1-(-e^{-x})}_{\sum_{n=0}^{\infty}(-e^{-x})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nx}}} = xe^{-nx}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nx} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x e^{-x(n+1)}$$ Całkę można zapisać w postaci:

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+e^x} = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x e^{-(n+1)x}\,dx$$

Powstaje oczywiście pytanie czy można zamieniać sumowanie i całkowanie. Na to pytanie odpowiemy za chwilę, na razie załóżmy, że można, i wykonajmy rachunki:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\int_0^\infty x e^{-(n+1)x}}\; = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = \pi^2/12$$

liczymy „na boku”

$$\int_0^\infty x e^{-(n+1)x}\,dx = \left\{\begin{matrix} u(x)=x & v'(x)=e^{-(n+1)x} \\ u'(x)=1 & v(x)=-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)x}\end{matrix}\right\} = -\frac{x}{n+1}e^{-(n+1)x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{n+1}e^{-(n+1)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)x}\right]_0^\infty = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Musimy teraz odpowiedzieć na pytanie, czy

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x e^{-(n+1)x} dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^\infty x e^{-(n+1)x} dx$$

Najpierw zbadajmy charakter zbieżności szeregu funkcyjnego:

$f_n(x) = (-1)^n x e^{-(n+1)x}$ $\quad f_n(0)=0$ $\quad \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$ $\quad f_n'(x) =$

$= (-1)^n (1-(n+1)x) e^{-(n+1)x}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{1+n}$ jest punktem krytycznym.

Jest to ekstremum: max lub min w zależności od parzystości n.

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = (-1)^n \frac{1}{n+1} e^{-1} = \frac{(-1)^n}{e(n+1)} \qquad |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{e(n+1)} = b_n$$

Problem w tym, że szereg $\sum b_n$ nie jest zbieżny, więc w ten sposób nie uda nam się wykazać jednostajnej zbieżności szeregu $\sum f_n(x)$. Trzeba zwrócić uwagę, że jest to szereg naprzemienny.

Przypomnijmy definicję jednostajnej zbieżności szeregu:

Szereg $\sum_n f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji f na zbiorze I

jeśli $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall x \in I \quad \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| < \varepsilon$

tzn $\quad \left| \sum_{n=N+1}^\infty f_n(x) \right| < \varepsilon$

Dla szeregów naprzemiennych jest szczególnie łatwo:

Po pierwsze zauważmy, że nasz szereg ma tę własność, że
$\forall x \quad |f_{n+1}(x)| < |f_n(x)|$, istotnie
$x e^{-(n+2)x} < x e^{-(n+1)x}$.

Oczywiście także $\sup|f_{n+1}| < \sup|f_n|$ tzn $\frac{1}{e(n+2)} < \frac{1}{e(n+1)}$
Oznacza to że dla każdego ustalonego x szereg $\sum f_n(x)$ jest szeregiem naprzemiennym podlegającym kryterium Leibniza tzn

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} f_n(x)\right| \leqslant |f_N(x)| \leqslant \sup|f_N(x)| \leqslant \frac{1}{(N+1)e}$$

Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ możemy dobrać N takie, że
$\frac{1}{(N+1)e} < \varepsilon$, co pokazuje, że nasz szereg jest jednostajnie zbieżny na $[0,\infty[$.

Kolejny problem to fakt że twierdzenie o zamianie kolejności całkowania i sumowania zachodzi na odcinku zwartym. Można więc napisać

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x+1} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sum_n f_n(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \sum_n \int_0^R f_n(x)\,dx$$

$$\int_0^R x\exp(-(n+1)x)\,dx = \left\{\begin{matrix} x & \exp(-(n+1)x) \\ 1 & -\frac{1}{n+1}\exp(-(n+1)x)\end{matrix}\right\} =$$

$$-\frac{x}{n+1}\exp(-(n+1)x)\Big|_0^R + \int_0^R \frac{1}{n+1}\exp(-(n+1)x)\,dx =$$

$$-\frac{R}{n+1}\exp(-(n+1)R) + \left(-\frac{\exp(-(n+1)x)}{(n+1)^2}\right)\Bigg|_0^R =$$

$$-\frac{R}{n+1}\exp(-(n+1)R) + \left[-\frac{\exp(-(n+1)R)}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right] =$$

$$= \exp(-(n+1)R)\left[-\frac{R}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Do policzenia jest więc

$u_n(x)$

$$\lim_{R\to\infty} \sum_n e^{-(n+1)R}\left(\frac{-R}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)(-1)^n$$

Tu nie mamy problemu z zamianą kolejności przechodzenia do granicy i sumowania, gdyż szereg jest jednostajnie zbieżny na odcinku $[R_0, \infty[$ dla wystarczająco dużego R_0. $R_0 > 2$ wystarczy z całą pewnością. $|u_n(R)|$ jest dla $r > R_0$ malejący zatem

$$|u_n(R)| \leq |u_n(R_0)| = \underbrace{e^{-(n+1)R_0}\left(\frac{R_0}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{c_n}$$

a szereg $\sum c_n$ jest zbieżny.

Zwróćmy uwagę, że w powyższym zadaniu dużo więcej pracy wymagało uzasadnienie poprawności zastosowanych metod rachunkowych niż samo wykonanie rachunków!

$$\int_0^\infty \log(1+e^{-x})\,dx = -\int_1^0 \log(1+t)\,\frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{1}{t}\log(1-t)\,dt$$

$$t=e^{-x} \quad dt = -e^{-x}dx = -t\,dx$$

$$x \in [0,\infty[\,, \quad t \in [0,1]$$

$$\frac{1}{t}\log(1+t) = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}t^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\cdot(-1)^n}{n+1}$$

$$\int_0^\infty \log(1-e^{-x})\,dx = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n+1}\right)dt$$

dla wystarczająco dużego N.

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(-1)t^n}{n+1}\right| \leq \frac{t^N}{N+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2}\,t^{n+1}\Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Powyższy rachunek jest łatwiejszy, bo od razu zamieniliśmy na całkowanie po zwartym odcinku. Może w tamtej całce też by się dało?

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1} = \quad t=e^{-x}+1 \quad e^{-x}=t-1$$

$$dt = -e^{-x}dx = (1-t)\,dx$$

$$dx = \frac{1}{1-t}\,dt \quad -x = \log(t-1)$$

$$x = \log(1/t-1)$$

$$= \int_2^1 \frac{\log\left(\frac{1}{t-1}\right)\,dt}{\underbrace{(1-t)\left[\frac{1}{t-1}+1\right]}_{(-t)}} =$$

$$= \int_1^e \frac{1}{t} \log\left(\frac{1}{t-1}\right) dt$$

Być może tak jest łatwiej... rachunków jednak nie będziemy już robić.

Zadanie 15

Niech $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy t^i_j w bazach kanonicznych. Wyznaczyć $\|T\|$ jeśli

(a) w $\mathbb{R}^n$ $\|x\| = |x^1| + |x^2| + \dots + |x^n|$ zaś w $\mathbb{R}^m$ $\|x\| = \max_{i=1\dots m}\{|x^i|\}$

(b) w obu przestrzeniach $\|x\| = \max_i \{|x^i|\}$

Rozwiązanie (a):

Niech $F: V_1 \to V_2$ będzie odwzorowaniem liniowym. Oznaczamy także przez $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ odpowiednio normy w przestrzeniach V_1 i V_2. Norma odwzorowania dana jest wzorem

$$\|F\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Fx\|_2$$

Jeśli $V_1 = \mathbb{R}^n$ z normą $\|x\|_1 = |x^1| + \dots + |x^n|$ to w szczególności mamy $\|x\|_1 = 1 \Longrightarrow |x^i| \leq 1$ dla $i = 1 \dots n$.

Odwzorowanie liniowe T z macierzą t^i_j działa na wektor $\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$ według wzoru $Tx = \begin{bmatrix} \sum_i t^1_i x^i \\ \vdots \\ \sum_i t^n_i x^i \end{bmatrix}$ przyjmując w $\mathbb{R}^m$ normę $\|y\|_2 = \max_j |y^j|$

mamy $\|Tx\|_2 = \max_j \left| \sum_i t^j_i x^i \right|$

Ostatecznie musimy wyznaczyć $\sup_{\|x\|_1 = 1} \max_j \left| \sum_i t^j_i x^i \right|$

zauważmy, że $\left|\sum_i t^j_i x^i\right| \le \sum_i |t^j_i||x^i| \le \left(\max_i |t^j_i|\right) \sum_i |x^i|$ $=1$

zatem

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_1=1} \max_j \left|\sum_i t^j_i x^i\right| \le \max_j \max_i |t^j_i| = \max_{ij} |t^i_j|$$

Ograniczeniem górnym na $\|T\|$ jest więc największy co do modułu wyraz macierzowy. Z drugiej strony, niech indeksy (i_0, j_0) odpowiadają właśnie temu największemu co do modułu wyrazowi macierzowemu. Weźmy także wektor e_{i_0} z bazy standardowej. Mamy wtedy $x^j = \delta^j_{i_0}$ bo $e_{i_0} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i_0 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$

Oczywiście $\|e_{i_0}\| = 1$

$$\|Te_{i_0}\| = \max_j \left|\sum_i t^j_i \delta^i_{i_0}\right| = \max_j |t^j_{i_0}| = t^{j_0}_{i_0}$$

Znaleźliśmy więc wektor, który „realizuje" ograniczenie górne na $\|T\|$. Oznacza to, że $\|T\| = \max_{ij} |t^i_j|$

(b) W przypadku (b) zmienia się norma w dziedzinie odwzorowania T. Teraz rozważamy tę samą co w przeciwdziedzinie. Zmienia się więc zbiór po którym bierzemy supremum. Przydatne będzie zatem inne oszacowanie $\|Tx\|$:

$$\|Tx\|_2 = \max_j \left|\sum_i t^j_i x^i\right| \leqslant \max_j \sum_i |t^j_i||x^i| \leqslant \max_j \sum_i |t^j_i|$$

Ograniczeniem na $\|T\|$ jest więc liczba $\max\limits_j \sum\limits_i |t^j_i|$

Czy uda się znaleźć wektor o długości 1, który zrealizuje to ograniczenie? Z całą pewnością tak! Niech j_0 będzie numerem wiersza macierzy T który daje największą wartość sumy $\sum\limits_i |t^j_i|$

Wybieramy wektor $\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$ o tej własności, że każde $x^i = \pm 1$ przy czym znak wybieramy taki jak znak $t^{j_0}_i$, tzn

$$x^i = \operatorname{sgn} t^{j_0}_i$$

Wtedy

$$\|Tx\| = \max_j \left|\sum_i t^j_i \operatorname{sgn}(t^{j_0}_i)\right| = \sum_i |t^{j_0}_i|$$

Tym razem zatem

$$\|T\| = \max_j \sum_i |t^{j_0}_i|$$