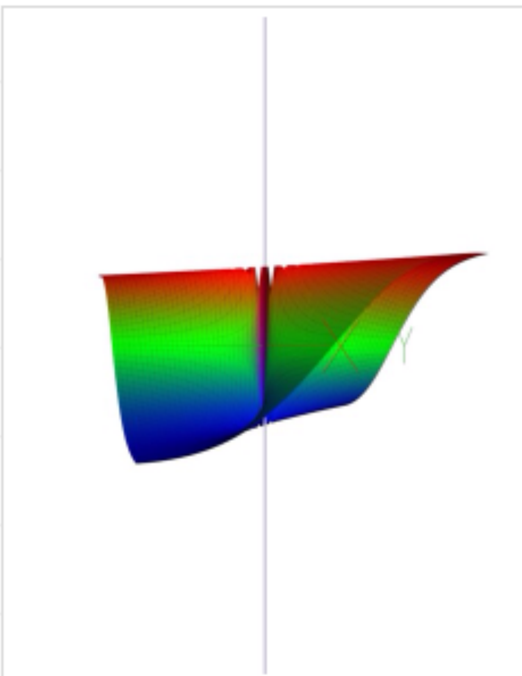
Zadanie 18

Sprawdzić, że funkcja $f(x,y) = \begin{cases} xy/x^2+y^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ma w punkcie $(0,0)$ obie pochodne cząstkowe lecz nie jest w tym punkcie ciągła oraz nie istnieje pochodna $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.



$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

Obie pochodne cząstkowe istnieją. Funkcja f jest jednak nieciągła, bo np $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) =$

$$= \frac{1/n^2}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{tam gdzie} \quad x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0) \qquad f(x_n) = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \frac{1}{2}$$

dla $y_n = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0 \qquad f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{5}$ i $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \frac{2}{5}$

$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(y_n)$ co pokazuje, że f jest nieciągła w $(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{0}}{t} \right)$$

obliczyć!

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\left(f(t,s) - \underbrace{f(t,0)}_{0}\right) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} f(t,s) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{\cancel{s}} \frac{t\cancel{s}}{t^2+s^2}$$

$$= \lim_{s \to 0} \left(\frac{t}{t^2+s} \right) = \begin{cases} 1/t & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) = 1/t$

funkcja $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ jest nieciągła: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{x} & x\neq 0 \end{cases}$

zatem nie istnieje pochodna $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

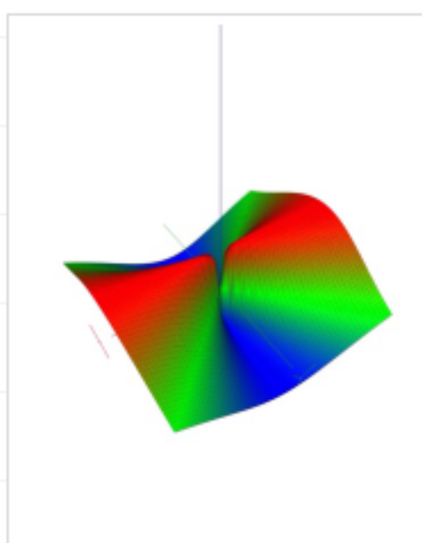
Zadanie 12

$$f_1 = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)$$

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$x^2-y^2 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2\cos 2\varphi$

$$f_1 \circ \phi = \frac{r^2\cos 2\varphi}{r^2} = \cos 2\varphi$$

Wynika z tego, że f jest stała na promieniach. Np gdy $\varphi = \pi/4$ $2\varphi = \pi/2$ $\cos 2\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ a gdy $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $2\varphi = \pi$ $\cos(2\varphi) = \cos\pi = -1$. Wartość ta jest niezależna od r, zatem w dowolnym otoczeniu punktu (0,0) ta funkcja przyjmuje wszystkie wartości z przedziału [0,1]. Nie da się więc funkcji f_1 uciąglić w (0,0).

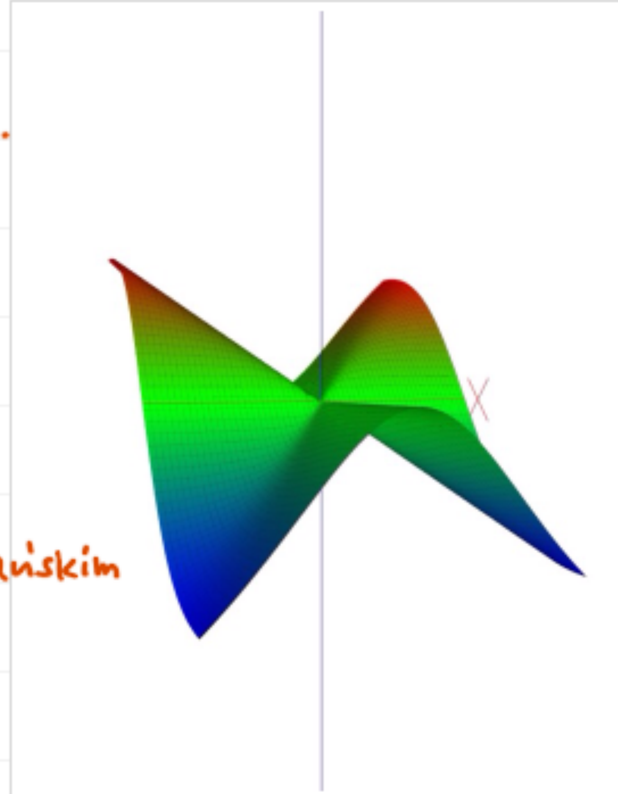


$$f_2(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

W biegunowym ukł. współrzędnych:

$$|f_2(x,y)| = \frac{1}{r^2} r^3 \cos^2\varphi|\sin\varphi| =$$

$$r\cos^2\varphi|\sin\varphi| \le r$$



ten sam rachunek w Kartezjańskim

$$|f_2(x,y)| = \frac{(x^2+y^2)^{3/2}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right)}{(x^2+y^2)} =$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\left[\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\right] \le \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \le 1, \quad \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} < 1$$

Podsumowując, jeśli (x,y) w pobliżu $(0,0)$ to $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$ wtedy $|f_2(x,y)| < \varepsilon$ $\longrightarrow$ żeby f_2 była ciągła $f_2(0,0) = 0$

$$f_3(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

Zobaczmy jak funkcja f_3 zachowuje się na prostych $y=ax$

$$f_3(x,ax)=\frac{x^2ax}{x^4+a^2x^2}=\frac{xa}{x^2+a^2}\xrightarrow{x\to 0}0$$

$$f_3(0,y)=0$$

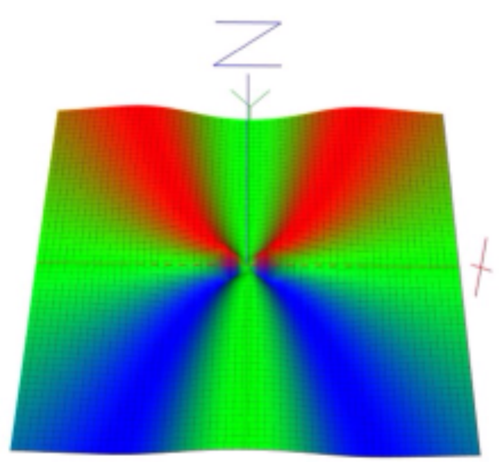
ale na krzywej $y=x^2$ mamy

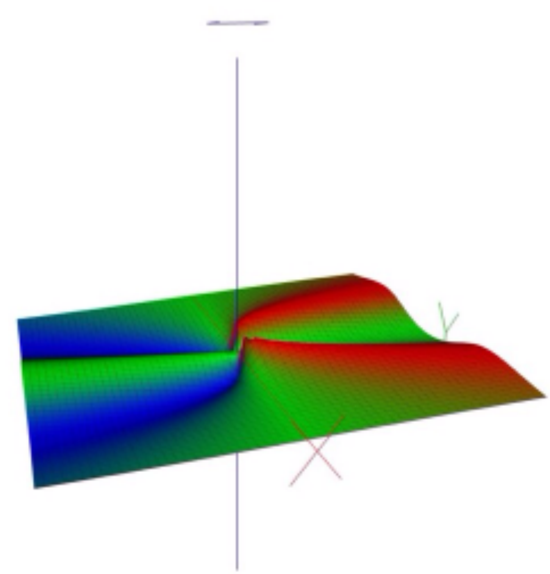
$$f_3(x,x^2)=\frac{x^2\cdot x^2}{x^4+(x^2)^2}=\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}$$

niezależnie od tego czy x duże czy małe!

f_3 nie da się „uciąglić"

Funkcja f_3 jest stała na parabolach!



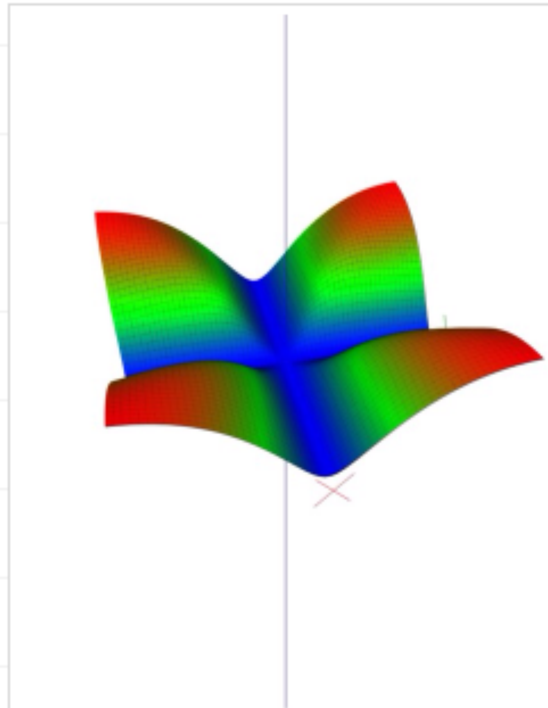


Zadanie 13

$$\frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2} = \frac{\cancel{1}+x^2y^2-\cancel{1}}{(x^2+y^2)\left[\sqrt{1+x^2y^2}+1\right]} = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\underbrace{\left[\sqrt{}+1\right]}_{\text{to ma skończoną granicę}}}$$

można więc badać to

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = |x|\underbrace{\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}_{\leq 1}\, y\, \underbrace{\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}_{\leq 1} \leq |xy| < \varepsilon$$



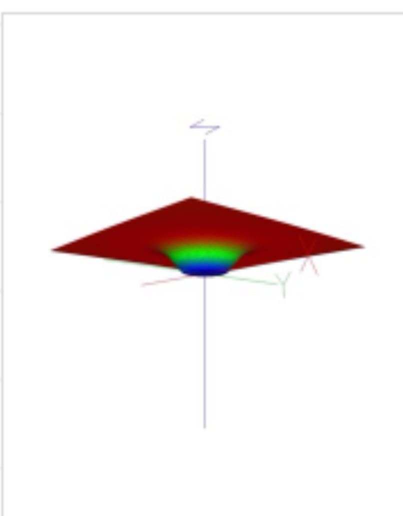
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2} = 0$$

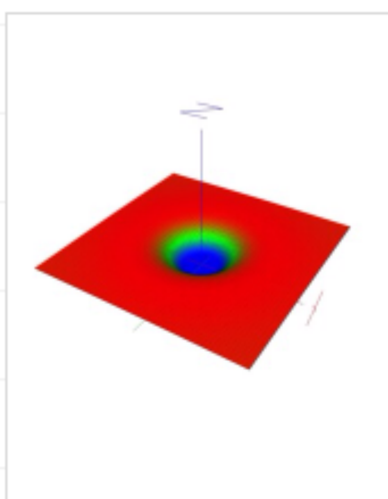
$$(1+x^2+y^2)^{1/x^2+y^2} =$$

$$(1+r^2)^{1/r^2} = e^1 = e$$

zamiast tego badamy logarytm :

$$\frac{1}{r^2}\log(1+r^2) = \frac{1}{r^2}\left(r^2-\frac{r^2}{2}+\cdots\right) \xrightarrow[r\to 0]{} 1$$



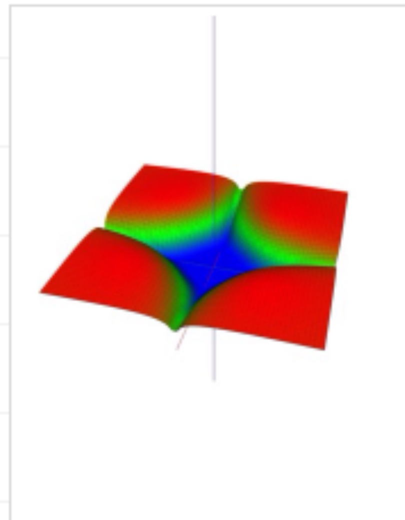


$$(1+x^2y^2)^{1/(x^2+y^2)} = (1+r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi)^{1/r^2} \longrightarrow e^0 = 1$$

logarytmujemy

$$\log\left(1+r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{r^2}} = \frac{1}{r^2}\left(r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \dots\right) \longrightarrow 0$$

Zadanie 14



$$\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+y}{x+y} = \frac{y}{y} = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\dots = 1$$

granice nie są równe

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+y}{x+y} = \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = x\sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\dots = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

Funkcja $(x,y)\longmapsto \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$ nie jest ciągła w $(0,0)$

Zadanie 15

Niech $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy t^i_j w bazach kanonicznych. Wyznaczyć $\|T\|$ jeśli

(a) w $\mathbb{R}^n$ $\|x\| = |x^1| + |x^2| + \dots + |x^n|$ zaś w $\mathbb{R}^m$ $\|x\| = \max\limits_{i=1\dots m}\{|x^i|\}$

(b) w obu przestrzeniach $\|x\| = \max\limits_i \{|x^i|\}$

Rozwiązanie (a):

Niech $F: V_1 \to V_2$ będzie odwzorowaniem liniowym. Oznaczamy także przez $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ odpowiednio normy w przestrzeniach V_1 i V_2. Norma odwzorowania dana jest wzorem

$$\|F\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Fx\|_2$$

Jeśli $V_1 = \mathbb{R}^n$ z normą $\|x\|_1 = |x^1| + \dots + |x^n|$ to w szczególności mamy $\|x\|_1 = 1 \implies |x^i| \leq 1$ dla $i = 1 \dots n$.

Odwzorowanie liniowe T z macierzą t^i_j działa na wektor $\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$ według wzoru $Tx = \begin{bmatrix} \sum_i t^1_i x^i \\ \vdots \\ \sum_i t^n_i x^i \end{bmatrix}$ przyjmując w $\mathbb{R}^m$ normę $\|y\|_2 = \max\limits_j |y^j|$

mamy $\|Tx\|_2 = \max\limits_j \left| \sum_i t^j_i x^i \right|$

Ostatecznie musimy wyznaczyć $\sup\limits_{\|x\|_1 = 1} \max\limits_j \left| \sum_i t^j_i x^i \right|$

zauważmy, że $|\sum_i t^j_i x^i| \le \sum_i |t^j_i||x^i| \le (\max_i |t^j_i|) \underbrace{\sum_i |x^i|}_{=1}$

zatem

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_1=1} \max_j \Big|\sum_i t^j_i x^i\Big| \le \max_j \max_i |t^j_i| = \max_{ij} |t^i_j|$$

Ograniczeniem górnym na $\|T\|$ jest więc największy co do modułu wyraz macierzowy. Z drugiej strony, niech indeksy (i_0, j_0) odpowiadają właśnie temu największemu co do modułu wyrazowi macierzowemu. Weźmy także wektor e_{i_0} z bazy standardowej. Mamy wtedy $x^j = \delta^j_{i_0}$ bo $e_{i_0} = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i_0\\ \\ \\ \end{array}$

Oczywiście $\|e_{i_0}\| = 1$

$$\|Te_{i_0}\| = \max_j \Big|\sum_i t^j_i \delta^i_{i_0}\Big| = \max_j |t^j_{i_0}| = t^{j_0}_{i_0}$$

Znaleźliśmy więc wektor, który „realizuje" ograniczenie górne na $\|T\|$. Oznacza to, że $\|T\| = \max_{ij} |t^i_j|$

(b) W przypadku (b) zmienia się norma w dziedzinie odwzorowania T. Teraz rozważamy tę samą co w przeciwdziedzinie. Zmienia się więc zbiór po którym bierzemy supremum. Przydatne będzie zatem inne oszacowanie $\|Tx\|$:

$$\|Tx\|_2 = \max_j \left|\sum_i t^j_i x^i\right| \leqslant \max_j \sum_i |t^j_i||x^i| \leqslant \max_j \sum_i |t^j_i|$$

Ograniczeniem na $\|T\|$ jest więc liczba $\max_j \sum_i |t^j_i|$

Czy uda się znaleźć wektor o długości 1, który zrealizuje to ograniczenie? Z całą pewnością tak! Niech j_0 będzie numerem wiersza macierzy T który daje największą wartość sumy $\sum_i |t^j_i|$

Wybieramy wektor $\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$ o tej własności, że każde $x^i = \pm 1$

przy czym znak wybieramy taki jak znak $t^{j_0}_i$, tzn

$$x^i = \operatorname{sgn} t^{j_0}_i$$

Wtedy

$$\|Tx\| = \max_j \left|\sum_i t^j_i \operatorname{sgn}(t^{j_0}_i)\right| = \sum_i |t^{j_0}_i|$$

Tym razem zatem

$$\|T\| = \max_j \sum_i |t^{j_0}_i|$$