Zadanie 23.

Obliczyć pochodną kierunkową $\varphi: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ w kierunku $h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ jeśli

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & & x_k^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 25

Niech $V = C([0,1])$ z normą $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Zbadać różniczkowalność odwzorowania $F: V \to V$

$$F(f)(x) = \int_0^x f^2(t)\,dt$$

MATERIAŁY Z ZAJĘĆ

17 i 18 marca

(nie wszystkie były robione)

Zadanie 20: Korzystając z definicji różniczkowalności wykazać, że odwzorowania

$F: \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto \sin(xy) \in \mathbb{R}, \quad G: \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto (x^2, 1+x+y^2) \in \mathbb{R}^2$

są różniczkowalne w każdym punkcie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$F(x+\delta x, y+\delta y) = F(x,y) + F'(x,y)\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix} + R\big((x,y);(\delta x,\delta y)\big) \qquad F'(x,y) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

$$\lim_{\|(\delta x,\delta y)\| \to 0} \frac{R(x,y,\delta x,\delta y)}{\|(\delta x,\delta y)\|} = 0$$

Kandydatem na pochodną jest macierz złożona z pochodnych cząstkowych:

$$F'(x,y) = \begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy)\end{bmatrix}$$

Dowód różniczkowalności polega na wyznaczeniu reszty i pokazaniu, że odpowiednia granica znika.

Na tym skończyły się poprzednie zajęcia.

$$\sin\big((x+\delta x)(y+\delta y)\big) = \sin(xy) + \begin{bmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix} + R$$

$$R = \sin\big(xy + y\delta x + x\delta y + \delta x\,\delta y\big) - \sin(xy) - y\delta x\cos(xy) - x\delta y\cos(xy) =$$

$$= \sin(xy)\cos\big(y\delta x + x\delta y + \delta x\delta y\big) + \cos(xy)\sin\big(x\delta y + y\delta x + \delta x\delta y\big) - y\delta x\cos(xy) - x\delta y\cos(xy) =$$

$$= \sin(xy)\Big[\cos\big(y\delta x + x\delta y + \delta x\delta y\big) - 1\Big] + \cos(xy)\Big[\sin\big(x\delta y + y\delta x + \delta x\delta y\big) - y\delta x - x\delta y\Big]$$

$$\sin(xy)\Big[\cos(y\delta x + x\delta y + \delta x\delta y) - 1\Big] + \cos(xy)\Big[\sin(x\delta y + y\delta x + \delta x\delta y) - y\delta x - x\delta y\Big]$$

Zajmiemy się oddzielnie zawartością każdego nawiasu kwadratowego. Interesować nas będzie sytuacja w której $(\delta x, \delta y)$ są małe:

$$\cos(y\delta x + x\delta y + \delta x\delta y) - 1 \approx \cancel{1} - \frac{1}{2}(y\delta x + x\delta y + \delta x\delta y)^2 + \dots \cancel{-1} \approx x^2\delta y^2 + y^2\delta x^2 + 2xy\,\delta x\delta y +$$

$+$ (wyrazy zawierające trzecie potęgi $\delta x, \delta y$) $\leftarrow \Theta(3)$

$$\sin(y\delta x + x\delta y + \delta x\delta y) - x\delta y - y\delta x = \cancel{y\delta x} + \cancel{x\delta y} + \delta x\delta y - \frac{1}{6}(y\delta x + x\delta y + \delta x\delta y)^3 + \dots - \cancel{x\delta y} - \cancel{y\delta x} =$$

$= \delta x\delta y +$ (wyrazy zawierające trzecie potęgi $\delta x, \delta y$) $\leftarrow \Theta(3)$

Wybieramy wygodną w tym przypadku normę $\|(\delta x, \delta y)\| = \max\{|\delta x|, |\delta y|\}$:

$$\frac{R(x,y,\delta x,\delta y)}{\|(\delta x,\delta y)\|} = \sin(xy)\,\frac{x^2\delta y^2 + y^2\delta x^2 + 2xy\,\delta x\delta y + \Theta(3)}{\|(\delta x,\delta y)\|} + \cos(xy)\,\frac{\delta x\delta y + \Theta(3)}{\|(\delta x,\delta y)\|}$$

W obu ułamkach w licznikach są wyrazy rzędu przynajmniej kwadratowego a w mianownikach wyrazy pierwszego rzędu. W granicy $(\delta x, \delta y) \longrightarrow (0,0)$ oba ułamki znikają. Dla przykładu przyjrzyjmy się

$$\frac{\delta x\delta y}{\|(\delta x,\delta y)\|} = \frac{\delta x\delta y}{\max(|\delta x|,|\delta y|)} = \begin{cases} (\operatorname{sgn}\delta x)\cdot\delta y & \text{jeśli } |\delta x| \geq |\delta y| \\ (\operatorname{sgn}\delta y)\cdot\delta x & \text{jeśli } |\delta x| < |\delta y| \end{cases}$$

w obu przypadkach granica jest zero, gdyż $(\delta x,\delta y) \longrightarrow (0,0)$ oznacza $\delta x \longrightarrow 0$ i $\delta y \longrightarrow 0$.

$G(x,y) = [x^2,\ 1+x+y^2]$, podobnie

$$G(x+\delta x, y+\delta y) = G(x,y) + G'(x,y)\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix} + R((x,y), \delta x, \delta y)$$

$G'(x,y) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ jest to więc macierz 2×2 o wyrazach zależnych od (x,y). Kandydatem na pochodną jest jak zwykle macierz pochodnych cząstkowych

$$G(x,y) = \begin{bmatrix} G^1(x,y) \\ G^2(x,y)\end{bmatrix} \text{ (notacja algebraiczna)} \qquad G'(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial G^1}{\partial x} & \frac{\partial G^1}{\partial y} \\ \frac{\partial G^2}{\partial x} & \frac{\partial G^2}{\partial y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 2y\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(x+\delta x)^2 \\ 1+(x+\delta x)+(y+\delta y)^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ 1+x+y^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 2y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x \\ \delta y\end{bmatrix} + R$$

$$R = \begin{bmatrix} x^2 + 2x\delta x + \delta x^2 \\ 1+x+\delta x + y^2 + 2y\delta y + \delta y^2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^2 \\ 1+x+y^2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x\delta x \\ \delta x + 2y\delta y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\delta x^2 \\ \delta y^2\end{bmatrix}$$

Wybierzmy w dziedzinie i w obrazie normę $\|(x,y)\| = |x| + |y|$. Wtedy $\frac{\|R(x,y,\delta x, \delta y)\|}{\|(\delta x, \delta y\|}$ przyjmuje postać:

$$\frac{|\delta x^2| + |\delta y^2|}{|\delta x| + |\delta y|} = \frac{|\delta x|^2 + |\delta y|^2}{|\delta x| + |\delta y|} = \frac{(|\delta x| + |\delta y|)^2 - 2|\delta x \delta y|}{|\delta x| + |\delta y|} =$$

$$= |\delta x| + |\delta y| + |\delta x| \underbrace{\frac{|\delta y|}{|\delta x| + |\delta y|}}_{\text{ograniczone}} \xrightarrow[\substack{\delta x \to 0 \\ \delta y \to 0}]{} 0$$

$|\delta y| \leq |\delta x| + |\delta y|$

$\to \ |\delta y| / (|\delta x| + |\delta y|) < 1$

Zadanie 19

Sprawdzić, że funkcja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ ma w $(0,0)$ obie pochodne cząstkowe, ale nie jest w tym punkcie różniczkowalna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

podobnie $\frac{\partial f}{\partial y}$ - funkcja jest niezmiennicza ze względu na zamianę x na y.

Gdyby więc f była różniczkowalna, to $[0,0]$ byłoby jej pochodną i reszta wyznaczona zgodnie ze wzorem

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + f'(x,y)\begin{bmatrix}\delta x \\ \delta y\end{bmatrix} + \underbrace{R(x,y,\delta x,\delta y)}_{\text{reszta}}$$

spełniałaby warunek

$$R(x,y,\delta x,\delta y) \Big/ \left\| \begin{bmatrix}\delta x \\ \delta y\end{bmatrix} \right\| \xrightarrow[\delta x, \delta y \to 0]{} 0$$

Obliczmy resztę dla $(x,y) = (0,0)$

$$f(\delta x, \delta y) = f(0,0) + [0,0]\begin{bmatrix}\delta x \\ \delta y\end{bmatrix} + R(\dots)$$

$$R(0,0;\delta x,\delta y) = \sqrt{|\delta x \delta y|}$$

$$\frac{\sqrt{|\delta x \delta y|}}{\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}} = \sqrt{\frac{|\delta x \delta y|}{\delta x^2 + \delta y^2}}$$

nie ma granicy - wystarczy porównać wartości na $\delta x = \frac{1}{n}$ $\delta y = \frac{1}{n}$ i $\delta x = 0$, $\delta y = \frac{1}{n}$

Zadanie 23

$$\varphi(x_1,\dots,x_k) = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & & x_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

wyznacznik Vandermonde'a

Wiadomo, że wyznacznik jest wielomianem stopnia $k-1$ ze względu na każdą zmienną, ponadto wyznacznik znika jeśli $x_i = x_j$. Można stąd wywnioskować iż

$$\varphi(x_1,\dots,x_k) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}\prod_{i>j}(x_i - x_j)$$ = policzyć nie jest łatwo... zacznijmy od przykładu:

$k=3$: x_1, x_2, x_3 $\quad \varphi(x_1,x_2,x_3) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} = -(x_3-x_1)(x_3-x_2) - (x_2-x_1)(x_3-x_2) = \frac{-\varphi}{(x_2-x_1)} - \frac{\varphi}{(x_3-x_1)} =$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} = (x_3-x_1)(x_3-x_2) - (x_2-x_1)(x_3-x_1) = \frac{\varphi}{(x_2-x_1)} - \frac{\varphi}{(x_3-x_2)}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^3} = +(x_2-x_1)(x_3-x_2) + (x_2-x_1)(x_3-x_1) = \frac{\varphi}{(x_3-x_1)} + \frac{\varphi}{(x_3-x_2)}$$

$$= \frac{\varphi}{x_1-x_2} + \frac{\varphi}{x_1-x_3} \qquad = \frac{\varphi}{(x_2-x_1)} + \frac{\varphi}{(x_2-x_3)}$$

Bardziej ogólnie:

plusy $\qquad$ minusy

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\prod_{i>j}(x_i-x_j) = \frac{\partial}{\partial x_l}\Big[(x_l-x_1)(x_l-x_2)\cdots(x_l-x_{l-1})(x_{l+1}-x_l)\cdots(x_k-x_l)\cdot$$

$$\cdot\prod_{\substack{i>j \\ i\neq l\ j\neq l}}(x_i-x_j)\Big) = +\frac{\varphi}{(x_l-x_1)} + \frac{\varphi}{(x_l-x_2)} + \dots + \frac{\varphi}{(x_l-x_{l-1})} - \frac{\varphi}{(x_{l+1}-x_l)} - \dots - \frac{\varphi}{(x_k-x_l)} =$$

$$= \sum_{i\neq l}\frac{\varphi}{(x_l-x_i)}$$

$$\varphi'(x_1 \dots x_k) = \left[\sum_{i \neq 1} \frac{\varphi}{(x_1 - x_i)} \quad \sum_{i \neq 2} \frac{\varphi}{(x_2 - x_i)} \quad \dots \quad \sum_{i \neq k} \frac{\varphi}{(x_k - x_i)} \right]$$

$$\nabla_h \varphi = \varphi'(x_1, \dots, x_k) h = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i \neq j} \frac{\varphi}{(x_j - x_i)}$$

W przykładzie $k=3$ $\nabla_h \varphi = \left[\frac{\varphi}{(x_1-x_2)} + \frac{\varphi}{(x_1-x_3)}, \frac{\varphi}{(x_2-x_1)} + \frac{\varphi}{(x_2-x_3)}, \frac{\varphi}{(x_3-x_1)} + \frac{\varphi}{(x_3-x_2)} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \frac{\varphi}{(x_1-x_2)} + \frac{\varphi}{(x_1-x_3)} + \frac{\varphi}{(x_2-x_1)} + \frac{\varphi}{(x_2-x_3)} + \frac{\varphi}{(x_3-x_1)} + \frac{\varphi}{(x_3-x_2)} = 0$$

przeciwne przeciwne przeciwne

Czy w ogólnym przypadku też jest zero? Łatwo zobaczyć że tak, bo w sumie

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i \neq j} \frac{\varphi}{(x_j - x_i)}$$

każda para indeksów (i_0, j_0) pojawia się dwa razy: $\frac{\varphi}{(x_{i_0} - x_{j_0})} + \frac{\varphi}{(x_{j_0} - x_{i_0})} = 0$ czyli składniki parami się upraszczają.

Zadanie 25.

$$V = C[0,1] \qquad \|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \qquad F(f)(x) = \int_0^x f^2(y)\,dy$$

Badamy istnienie pochodnej kierunkowej $h \in V$

$$F(f+th)(x) = \int_0^x (f+th)^2(y)\,dy = \int_0^x \left[f^2(y) + 2t f(y)h(y) + t^2 h^2(y) \right] dy =$$

$$= \int_0^x f^2(y)\,dy + 2t \int_0^x f(y)h(y)\,dy + t^2 \int_0^x h^2(y)\,dy$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(F(f+th)-F(f)\Big] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[\cancel{\int_0^x f^2(y)dy} + 2t\int_0^x f(y)h(y)dy + t^2\int_0^x h^2(y)dy - \cancel{\int_0^x f^2(y)dy}\Big] = \lim_{t\to 0}\Big[2\int_0^x f(y)h(y)dy + t^2\int_0^x h^2(y)\Big] =$$

$$= 2\int_0^x f(y)h(y)dy$$

$$(\nabla_h F)(f)(x) = 2\int_0^x f(y)h(y)dy$$

Pochodna kierunkowa istnieje. Należy teraz sprawdzić, czy jest liniowa i ciągła ze względu na przyrost. Potem sprawdzimy jak zachowuje się reszta.

(1) Liniowość ze względu na h:

$$(\nabla_{h_1+h_2}F)(f)(x) = \int_0^x f(y)[h_1(y)+h_2(y)]dy = \text{oczywiste} =$$

$$(\nabla_{h_1}F)(f)(x) + (\nabla_{h_2}F)(f)(x)$$

(2) Ciągłość ze względu na h.

$$\|(\nabla_h F)(f)\| = \sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x f(y)h(y)dy\right| \leq \sup_x \int_0^x |f(y)||h(y)|dy =$$

$$\int_0^1 |f(y)||h(y)| \leq \sup_{x\in[0,1]}|h(x)|\int_0^1 |f(y)|dy = \|h\|\int_0^1 |f(y)|dy$$

jeśli więc $\|h\| < \delta$ to $\|\nabla_h F(f)\| < \underbrace{\delta\cdot\int_0^1 |f(y)|dy}_{\varepsilon}$

$$\varepsilon = \delta\int_0^1 |f(y)|dy$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\int_0^1 |f(y)|dy}$$

Wykazaliśmy ciągłość odwzorowania $h \longmapsto (\nabla_h F)(f)$ w zerze, co dla liniowych odwzorowań jest całkowicie wystarczające.

Pochodna kierunkowa istnieje i jest liniowa i ciągła względem przyrostu. Jest więc dobrym kandydatem na mocną pochodną. Trzeba badać resztę.

$$F(f+h) = F(f) + \nabla_h F(f) + R(f,h)$$

$$\int_0^x \left[f^2(y) + 2f(y)h(y) + h^2(y)\right] dy = \int_0^x f^2(y)dy + 2\int_0^x f(y)h(y)\,dy + R(f,h)$$

$$R(f,h)(x) = \int_0^x h^2(y)dy$$

$$\| R(f,h)\| = \sup_x \left| \int_0^x h^2(y)\,dy \right| = \int_0^1 h^2(y)dy \le \left(\sup_x |h(x)|\right)^2 \int_0^1 dy = \|h\|^2$$

$$\frac{\| R(f,h)\|}{\|h\|} \le \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Reszta ma wymaganą własność, więc F jest różniczkowalne.

Kartkówka

Zamieniając na szereg potęgowy obliczyć sumę $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

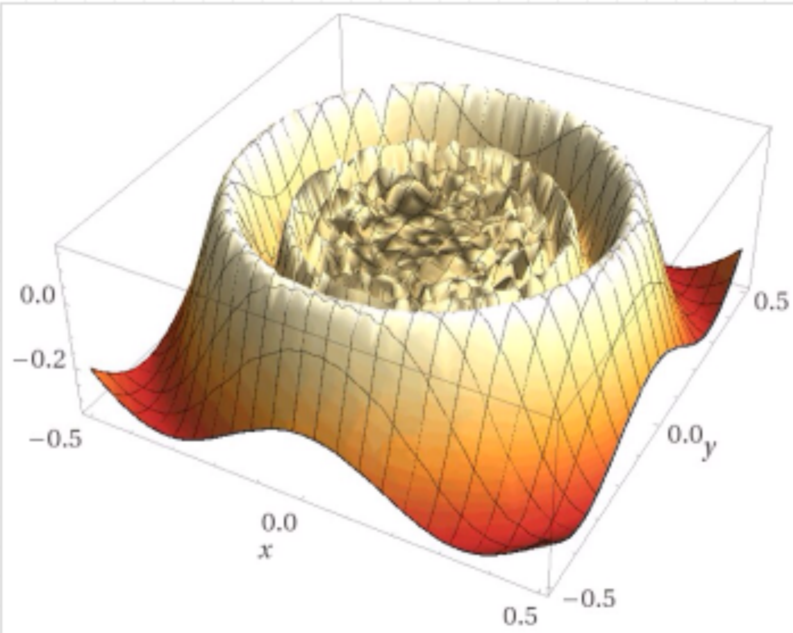
$$\sum \frac{n}{3^n} = f(1/3) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) =$$

$$= x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = x \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1/3}{(1-1/3)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

ZADANIE 21

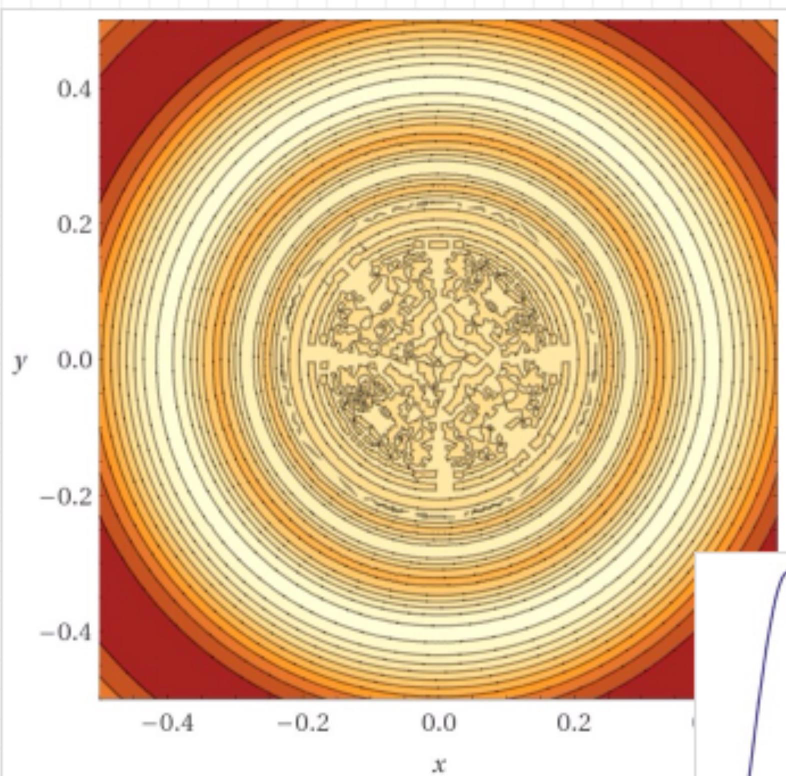
$$f(x) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



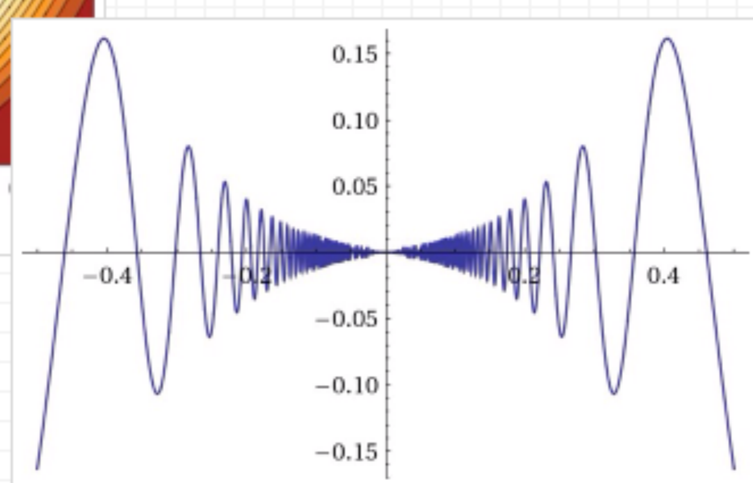
Pokażemy, że funkcja jest różniczkowalna w zerze, ale nie jest klasy C^1, tzn pochodna nie jest ciągła (jako odwzorowanie

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto F'(x,y) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

Na obrazkach są wykresy zwykły i poziomice. Bałagan, który widać w środku to efekt błędów numerycznych.



Przekrój wzdłuż promienia wygląda tak:



Szukamy pochodnej w punkcie (0,0). Jak zwykle kandydatem na pochodną jest macierz złożona z pochodnych cząstkowych

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)-0}{t} = \lim_{t\to 0} t\cos\left(\frac{1}{t^2}\right) = 0$$

podobnie będzie dla $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

Pochodne cząstkowe istnieją i są równe zero, pochodna w (0,0) jeśli istnieje jest odwzorowaniem zerowym

$$f(0+\delta x, 0+\delta y) = \underbrace{f(0,0)}_{0} + \underbrace{f'(0,0)\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix}}_{=0} + R$$

$$\downarrow$$

$$R = (\delta x^2+\delta y^2)\cos\left(\frac{1}{\delta x^2+\delta y^2}\right) \qquad \frac{R}{\|\delta x,\delta y\|} = \frac{\delta x^2+\delta y^2}{\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}\cos\left(\frac{1}{\delta x^2+\delta y^2}\right) =$$

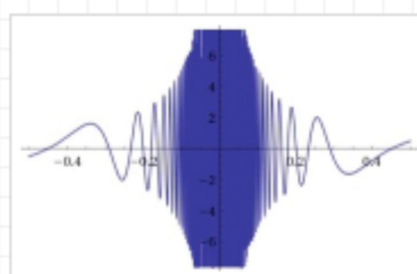
$$= \sqrt{\delta x^2+\delta y^2}\cos\left(\frac{1}{\delta x^2+\delta y^2}\right) \xrightarrow[\sqrt{\dots}\to 0]{} 0$$

Reszta ma potrzebną własność, więc f różniczkowalna w zerze i pochodna jest równa $[0\ 0]$. Teraz zajmiemy się problemem ciągłości pochodnej

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\left(-\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= 2x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{2x}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{2y}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$



$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n}\cos\left(\frac{n^2}{2}\right) + \frac{2}{n}\cdot\frac{n^2}{2}\sin\left(\frac{n^2}{2}\right) =$$

$$\frac{2}{n}\cos\left(\frac{n^2}{2}\right) + n\sin\left(\frac{n^2}{2}\right) \leftarrow$$ nie ma granicy!

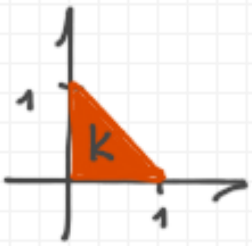
Zadanie 28

Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x,y) = (x+y)\exp\left(-\frac{x}{2} - 2y\right)$$

na zbiorze

$$K = \{(x,y) : x,y \geq 0 ,\ x+y \leq 1\}$$



Poszukamy punktów krytycznych we wnętrzu K oraz na brzegu. Zaczniemy od wnętrza:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp\left(-\frac{x}{2} - 2y\right) + (x+y)\exp\left(-\frac{x}{2} - 2y\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \exp\left(-\frac{x}{2} - 2y\right)\left[1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \exp\left(-\frac{x}{2} - 2y\right) + (x+y)\exp\left(-\frac{x}{2} - 2y\right)(-2) = \exp\left(-\frac{x}{2} - 2y\right)\left[1 - 2x - 2y\right]$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ oznacza $\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right) = 0 \Rightarrow x+y = 2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ oznacza $(1 - 2x - 2y) = 0 \Rightarrow x+y = \frac{1}{2}$

sprzeczne.

Funkcja f nie ma punktów krytycznych wewnątrz K. Badamy na brzegu

Na I_1 : $(x,0)$

$f(x,0) = x\exp\left(-\frac{x}{2}\right) = \alpha(x)$ $\quad \alpha'(x) = e^{-x/2} + x e^{-x/2}\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-x/2}\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 0$

$\rightarrow x = 0$. punkt $(0,2)$ nie należy do I_1

Na I_2 : $(0,y)$

$f(0,y) = y\exp(-2y) = \beta(y)$ $\quad \beta'(y) = e^{-2y}(1-2y) = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

Punktem krytycznym na I_2 jest $(0,\frac{1}{2})$

na I_3 $\quad x+y=1 \quad y=1-x$

$$f(x,1-x)=(x+1-x)\exp\left(-\frac{x}{2}-2(1-x)\right)=\exp\left(\frac{3}{2}x-1\right)=\frac{1}{e}\,e^{\frac{3}{2}x}$$

funkcja nie ma punktów krytycznych

Wartości ekstremalne wybieramy spośród

$f(0,0)=0$

$f(0,1)=1\cdot e^{-2}=1/e^2$

$f(1,0)=1\cdot e^{-1/2}=1/\sqrt{e}$

$f(0,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2e}$

$$\underbrace{0<\frac{1}{e^2}}_{\text{min}}<\frac{1}{2e}<\underbrace{\frac{1}{\sqrt{e}}}_{\text{max}}$$

Zadanie 29

Zrobić jako test znajomości sposobu badania drugiej pochodnej.

Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji. Zbadać typ.

$$f(x,y)=x^4+y^2-2x^2y^2+1$$

$$f_x=4x^3-4xy^2=4x(x^2-y^2)=4x(x+y)(x-y)=0 \qquad x=y \text{ lub } x=-y \text{ lub } x=0$$

$$f_y=2y-4x^2y=2y(1-2x^2)=0 \qquad y=0 \text{ lub } x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(x=0 \text{ lub } x=y \text{ lub } x=-y) \text{ i } \left(y=0 \text{ lub } x=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ lub } x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$(0,0);\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

mamy pięć punktów krytycznych.

$f_x = 4x^3 - 4xy^2$

$f_y = 2y - 4x^2y$

$f_{xx} = 12x^2 - 4y^2$

$f_{yy} = 2 - 4x^2$

$f_{xy} = -8xy$

$$\begin{bmatrix} 12x^2 - 4y^2 & -8xy \\ -8xy & 2-4x^2 \end{bmatrix}$$

W punkcie $(0,0)$ $f'' = 0$, kryterium nie rozstrzyga o rodzaju punktu krytycznego

w punkcie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ i podobnie w $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$f'' = \begin{bmatrix} \frac{12}{2} - \frac{4}{2} & -\frac{8}{2} \\ -\frac{8}{2} & 2 - \frac{4}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznacznikowo: $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ $D_1 = 4 > 0$, $D_2 = 0 - 16 = -16 < 0$

$D_1 > 0$ $\frac{D_2}{D_1} < 0$

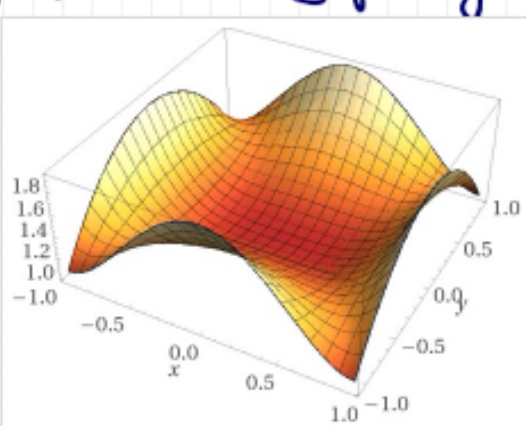
$(+-)$ punkt siodłowy

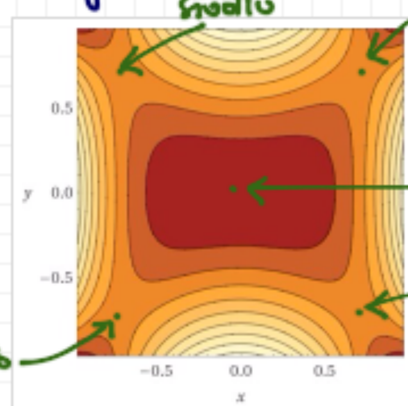
w $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ i podobnie w $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\begin{bmatrix} 4 & +4 \\ +4 & 0 \end{bmatrix}$ $D_1 = 4 > 0$, $D_2 = 0 - 16 = -16 < 0$

j.w.

Funkcja f ma cztery punkty siodłowe i jedno nie wiadomo co.





siodło

siodło

nie wiadomo co, na oko minimum

siodło

siodło

Zadanie 26

Obliczyć macierz Jacobiego superpozycji odwzorowań T i S i sprawdzić że $(T\circ S)'^{i}{}_{j} = \sum_k T'^{i}{}_{k}\, S'^{k}{}_{j}$

$$S:\ \mathbb{R}^1 \ni t \longmapsto (t, \log(1+t^4)) \in \mathbb{R}^2$$

$$T:\ \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto (\sin x, e^{x+y}, 1) \in \mathbb{R}$$

$$T\circ S(t) = T(S(t)) = \left(\sin t,\ e^{t+\log(1+t^4)},\ 1\right) = \left(\sin t,\ (1+t^4)e^t,\ 1\right)$$

$x(t) = t$
$y(t) = \log(1+t^4)$

$$(T\circ S)' = \begin{bmatrix} \cos t \\ (4t^3+t^4+1)e^t \\ 0 \end{bmatrix} \qquad S'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4t^3}{1+t^4} \end{bmatrix} \qquad T'(x,y) = \begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T'(x(t), y(t))\cdot S'(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ (1+t^4)e^t & (1+t^4)e^t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4t^3}{1+t^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ (1+t^4+4t^3)e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

zgadza się!

$$S:\ \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto (xy,\ x+y,\ \sin(xy)) \in \mathbb{R}^3$$

$$T:\ \mathbb{R}^3 \ni (a,b,c) \longmapsto (a+b+c,\ -b) \in \mathbb{R}^2$$

$$T\circ S(x,y) = (xy+x+y+\sin(xy),\ -x-y)$$

$a(x,y) = xy$

$b(x,y) = x+y$

$c(x,y) = \sin(xy)$

$$(T\circ S)'(x,y) = \begin{bmatrix} y+1+y\cos(xy) & x+1+x\cos(xy) \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T'(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad S'(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 1 & 1 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{bmatrix}$$

$$T'(a(x,y), b(x,y), c(x,y)) \cdot S'(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x \\ 1 & 1 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} y+1+y\cos xy & x+1+x\cos(xy) \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

zgadza się!