KOLOKWIUM PRZYKŁADOWE:

ZADANIE 1:

Sprawdzić, że funkcja $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{1+x^2}\right)$ jest funkcją klasy C^1 na $\mathbb{R}$ i spełnia równanie różniczkowe

$$(1+x^2)f_x + 2xyf_y = 0$$

jeśli $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

ZADANIE 2:

Rozwinąć w szereg potęgowy funkcję $f(x) = \int_x^2 \frac{\log(1+t)}{t}\,dt$ wokół punktu $x_0 = 2$ i znaleźć promień zbieżności otrzymanego szeregu.

ZADANIE 3:

Zbadać punktową i jednostajną zbieżność ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

ZADANIE 4:

Znaleźć i zbadać ekstrema lokalne oraz maksimum i minimum funkcji $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$ na zbiorze

$$\{(x,y):\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 2\pi\}$$

ZADANIE 5:

Obliczyć całkę $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x-x^2}}$

NIEKTÓRE ZADANIA Z ZAJĘĆ
24,25 marca

ZADANIE

Znaleźć punkty krytyczne danych funkcji i zbadać ich typ:

$$f(x,y,z) = e^x + e^y + e^z + 4e^{-x}e^{-z} + e^{-y}e^{z}$$

$$g(x,y) = x^3+y^3-3axy \quad (\text{w zależności od wartości } a\in\mathbb{R})$$

$$h(x,y) = x^2+xy+y^2-4\log x-10\log y$$

FUNKCJA F:

Sprawdzamy warunek konieczny istnienia ekstremum:

$f_x = e^x - 4e^{-x}e^{-z}$

$f_y = e^y - e^{-y}e^{z}$

$f_z = e^z - 4e^{-x}e^{-z} + e^{-y}e^{z}$

Jeśli $X=e^x$ $Y=e^y$ $Z=e^z$ to

$0 = X - \frac{4}{XZ} \to X^2Z=4 \to X^2Y^2=4$

$0 = Y - \frac{Z}{Y} \to Y^2 = Z$

$XY=2$

(bo $X,Y>0$)

$0 = Z - \frac{4}{XZ} + \frac{Z}{Y}$

$$0 = Y^2 - \frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{\frac{2}{Y}}\cdot \cancel{Y^2}} + \frac{Y^2}{Y} =$$

	1	1	0	-2
1	1	2	2	0

$Y=1$ $y=0$

$X=2$ $x=\log 2$

$Z=1$ $z=0$

$$= Y^2 - \frac{2}{Y} + Y \Rightarrow 0 = Y^3+Y^2-2 = (Y-1)\underbrace{(Y^2+2Y+2)}_{>0}$$

Jedynym punktem krytycznym jest punkt $(\log 2, 0, 0)$. Badamy typ punktu krytycznego – druga pochodna

$$f_{xx} = e^x + 4e^{-x}e^{-z} = X + \frac{4}{XZ} = 1 + \frac{4}{2} = 3$$
$$f_{xy} = 0$$
$$f_{xz} = 4e^{-x}e^{-z} = \frac{4}{XZ} = 2$$
$$f_{yy} = e^y + e^z e^{-y} = Y + \frac{Z}{Y} = 2$$
$$f_{yz} = -\frac{e^z}{e^y} = -\frac{Z}{Y} = -1$$
$$f_{zz} = e^z + 4e^{-x}e^{-z} + e^z e^{-y} = Z + \frac{4}{XZ} + \frac{Z}{Y} = 1 + \frac{4}{2} + 1 = 4$$

$$f''(\log 2, 0, 0) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$D_1 = 3 \quad D_2 = 6 \quad D_3 = 24 - 8 - 3 = 13$

Wyznaczniki D_1, D_2, D_3 są dodatnie, zatem punkt $(\log 2, 0, 0)$ jest minimum (sygnatura drugiej pochodnej w punkcie krytycznym to $(+++)$)

FUNKCJA g

$$g(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$$

$g_x = 3x^2 - 3ay = 0 \qquad x^2 = ay \nearrow \quad \frac{y^4}{a^2} = ay \quad y^4 - a^3 y = 0 \quad y(y^3 - a^3) = 0$

$g_y = 3y^2 - 3ax \qquad y^2 = ax \to x = y^2/a$

$y = 0$ lub $y = a$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x = 0 \qquad x = a$

Mamy dwa punkty krytyczne: $(0,0)$ i (a,a), jeśli $a=0$ te dwa punkty stają się jednym, który nie jest ekstremum.

$g_x = 3x^2 - 3ay = 0$ $\qquad g_{xx} = 6x$

$g_y = 3y^2 - 3ax$ $\qquad g_{xy} = -3a \qquad g'(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -3a \\ -3a & 6y \end{bmatrix}$

$\qquad g_{yy} = 6y$

w punkcie $(0,0)$

$g''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3a \\ -3a & 0 \end{bmatrix}$ druga pochodna nie nadaje się do metody wyznacznikowej. Liczymy inaczej:

$$g''(0,0)(h_x, h_y) = -6a h_x h_y = -6a(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = -6a\alpha^2 + 6a\beta^2.$$

$h_x = \alpha + \beta$

$h_y = \alpha - \beta$

Niezależnie od znaku a sygnatura drugiej pochodnej to $(+-)$ zatem punkt $(0,0)$ jest siodłowy.

w punkcie (a,a)

$g''(a,a) = \begin{bmatrix} 6a & -3a \\ -3a & 6a \end{bmatrix}$ $\quad D_1 = 6a$

$D_2 = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2 > 0$

gdy $a > 0$

$D_1 > 0 \quad D_2 > 0$

sygnatura $(++)$

minimum

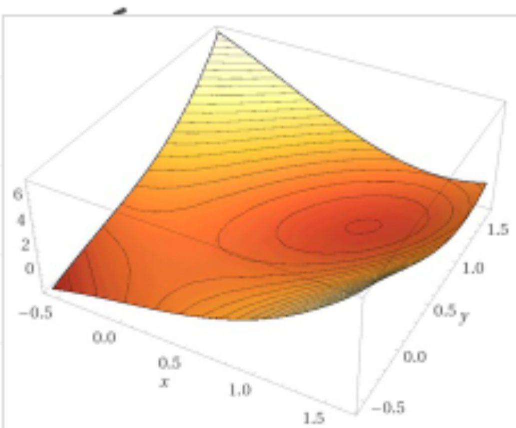
gdy $a < 0$

$D_1 < 0 \quad D_2 > 0$

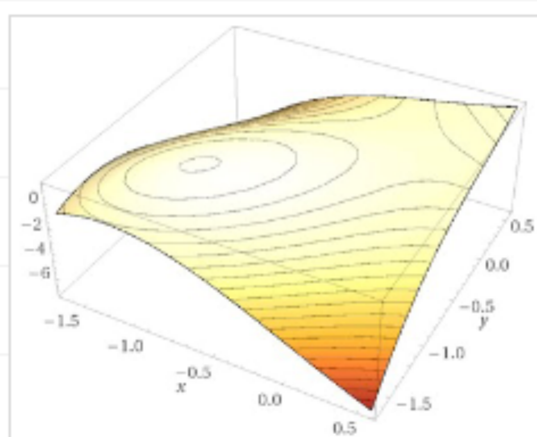
sygnatura $(--)$

maksimum.

$a = 1$



$a = -1$



ZADANIE:

Pokazać, że funkcja

$$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$$

nie ma minimum w punkcie $(0,0)$, chociaż każda z funkcji $f_{ab}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_{ab}(t)=f(at,bt)$ ma minimum w $(0,0)$

$$f(x,y)=y^2-3x^2y+2x^4$$

$f_x=-6xy+8x^3=0 \to 2x(-3y+4x^2)=0$

$f_y=2y-3x^2=0 \to 2y-3x^2=0 \nearrow$ $x=0$, $y=0$

$(0,0)$ is punktem krytycznym

$f_{xx}=-6y+24x^2$

$f_{xy}=-6x$

$f_{yy}=2$

$f''(0,0)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ druga pochodna jest zdegenerowana

$f_{xxx}=48x \quad f_{xxy}=-6$

$f_{xyy}=0 \quad f_{yyy}=0$

trzecia pochodna jest niezerowa

$\to$ punkt $(0,0)$ nie jest ekstremum

$$f_{ab}(t)=(bt-a^2t^2)(bt-2a^2t^2)=$$
$$b^2t^2-3a^2bt^3+2a^4t^4$$

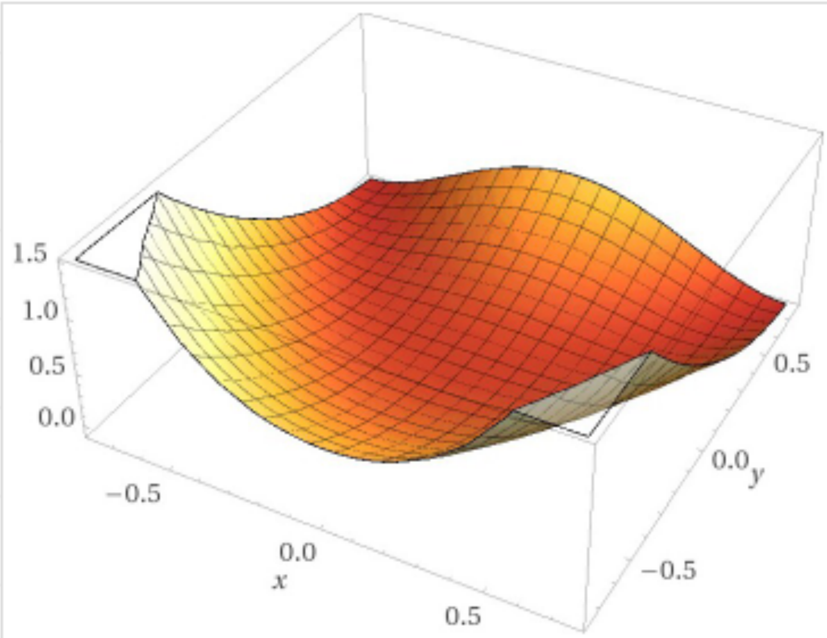
$f_{ab}'(t)=2b^2t-9a^2bt^2+8a^4t^3$

$f_{ab}'(0)=0 \quad f_{ab}''(0)=2b^2>0$ dla $b\neq 0$. $\to t=0$ minimum

Gdy $b=0$

$f(0,x)=x^4$

$x=0$ jest minimum.



$f(x,y) > 0$ gdy $y > 2x^2$ lub $y < x^2$

$f(x,y) < 0$ gdy $x^2 < y < 2x^2$

W dowolnym otoczeniu punktu $(0,0)$ są punkty dla których f jest dodatnie i takie dla których f jest ujemne.